Approximations de réels

Alexandre Benoit

BCPST

Équations non linéaires

- Étant donné une fonction f, on cherche une valeur x pour laquelle

$$f(x) = 0$$

- Une solution x est une racine de l'équation ou un zéro de la fonction f.

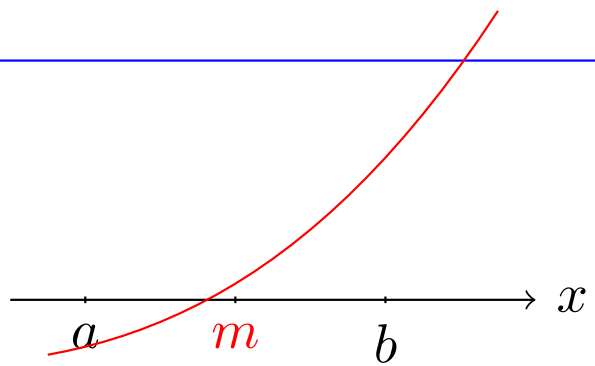
Pour simplifier le propos, dans la suite on suppose que $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle où l'on travaille. On peut démontrer l'unicité d'une solution à l'aide par exemple du théorème de la bijection.

I Dichotomie

Dichotomie

Le principe de la méthode par dichotomie est de partir d'un intervalle qui contient une solution et de diviser ensuite par deux sa longueur jusqu'à ce qu'on ait isolé la solution avec une précision suffisante

```
while (b − a) > e :
    m=a +(b−a )/2
    if f(a) ∗ f(m) > 0 :
            a=m
    else
            b=m
```



II Méthode de Newton

Méthode de Newton

- L'idée est que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
  Donc quand x est proche de x_0, on a :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

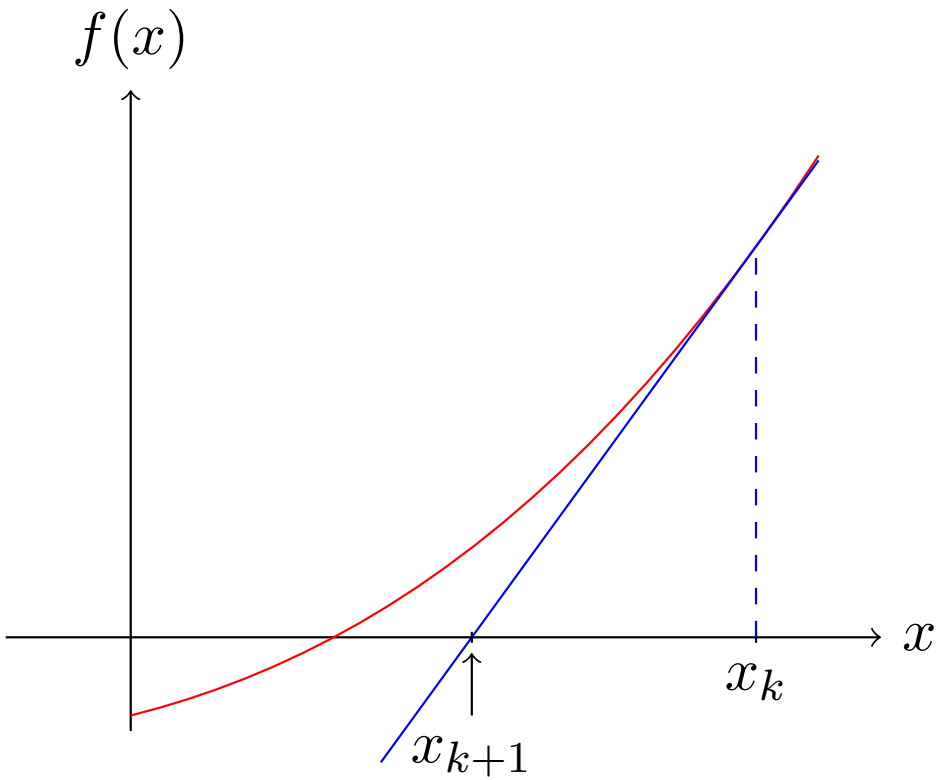
  Il s'agit d'une fonction linéaire en x approximant f au voisinage de x_0
- Au lieu de résoudre $f(x) = 0$, on résout $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- On nomme x_1 la racine de cette équation, on a $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- Les racines de la fonction f et de l'approximation linéaire ne sont en général pas identique donc on itère le processus

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

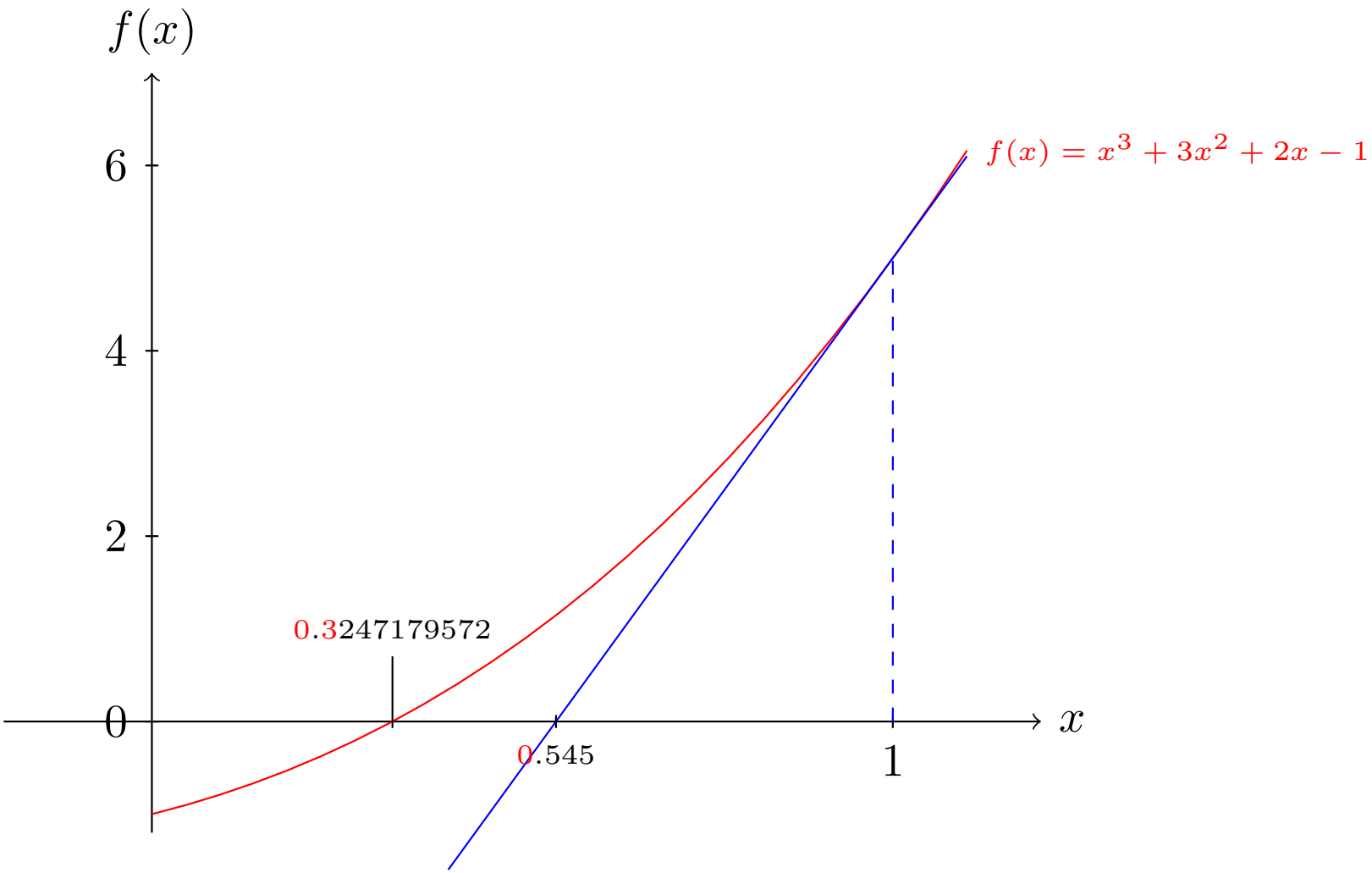
- On s'arrête lorsque $x_{k+1} - x_k$ sont « assez proche ». C'est-à-dire plus petit qu'une certaine valeur e.

Méthode de Newton (suite)

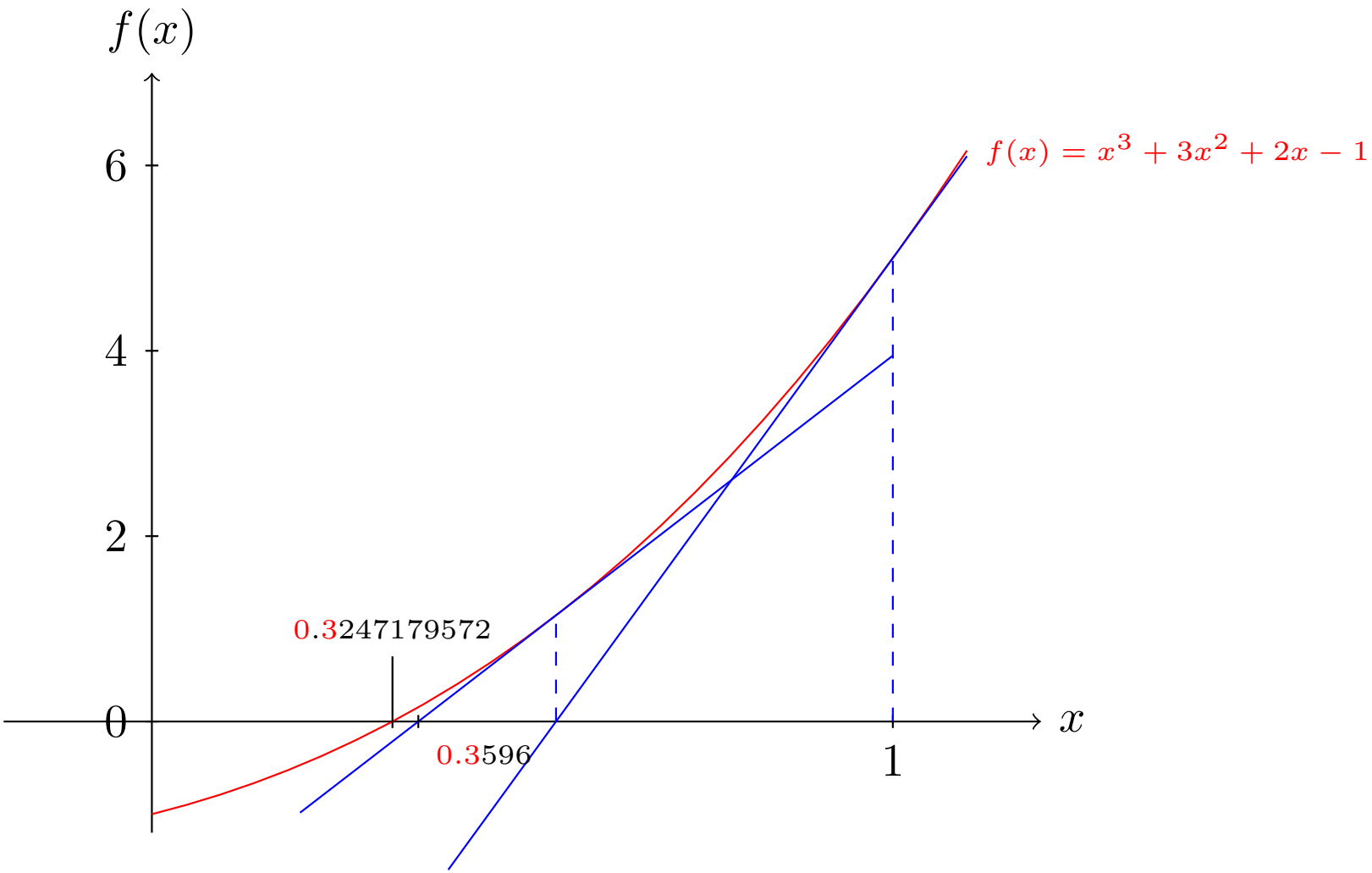
La méthode de Newton approxime une fonction non linéaire f près de x_k par sa tangente en $f(x_k)$



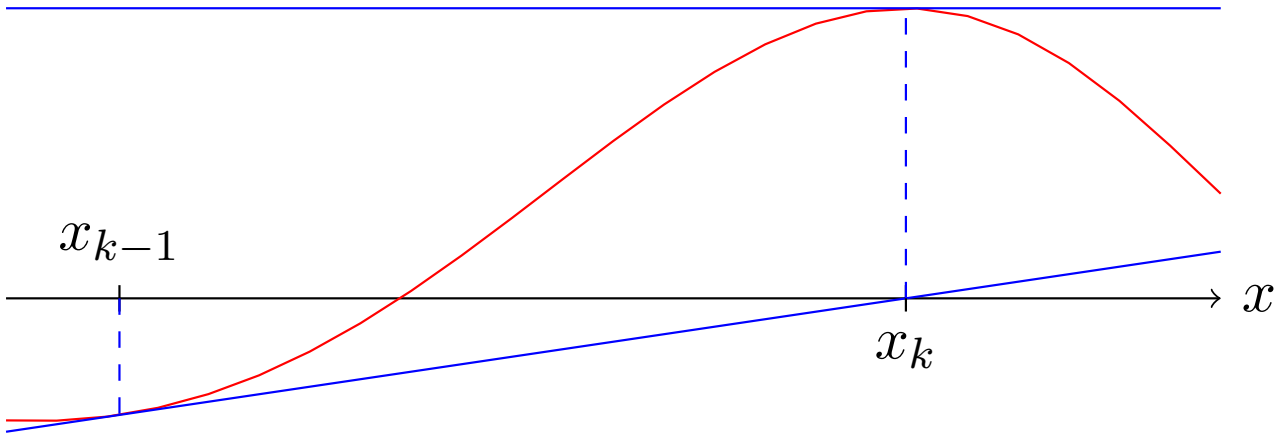
Exemple avec le polynôme $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$



Exemple avec le polynôme $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

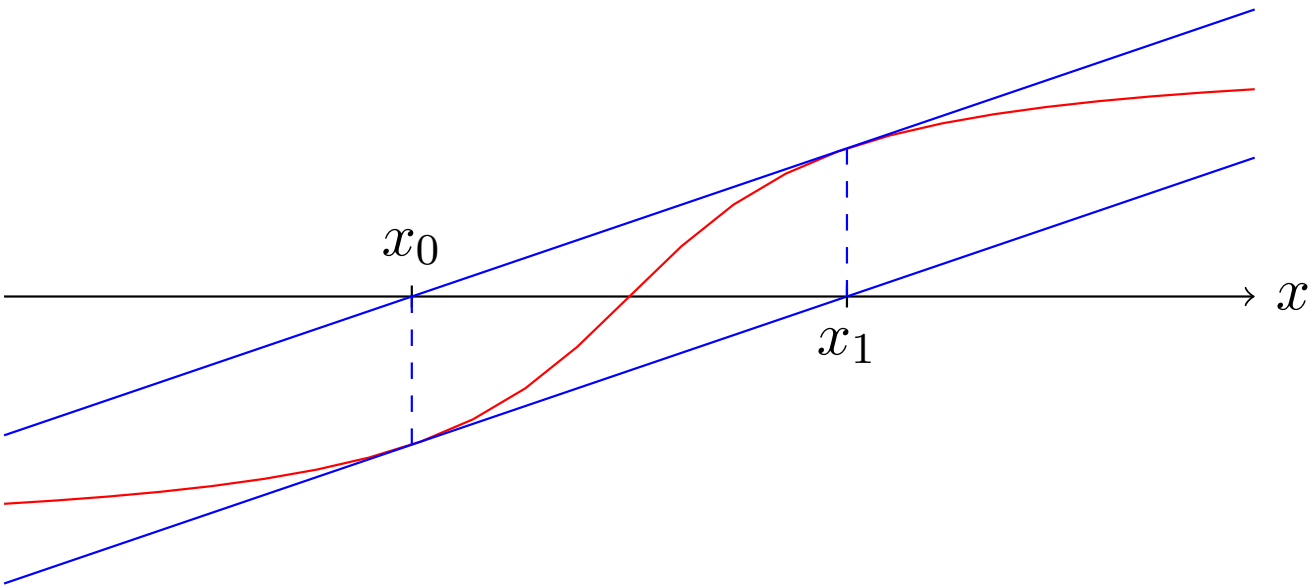


Exemples où la Méthode de Newton ne fonctionne pas (1)



La méthode ne fonctionne pas si il existe x_k tel que $f'(x_k) = 0$.

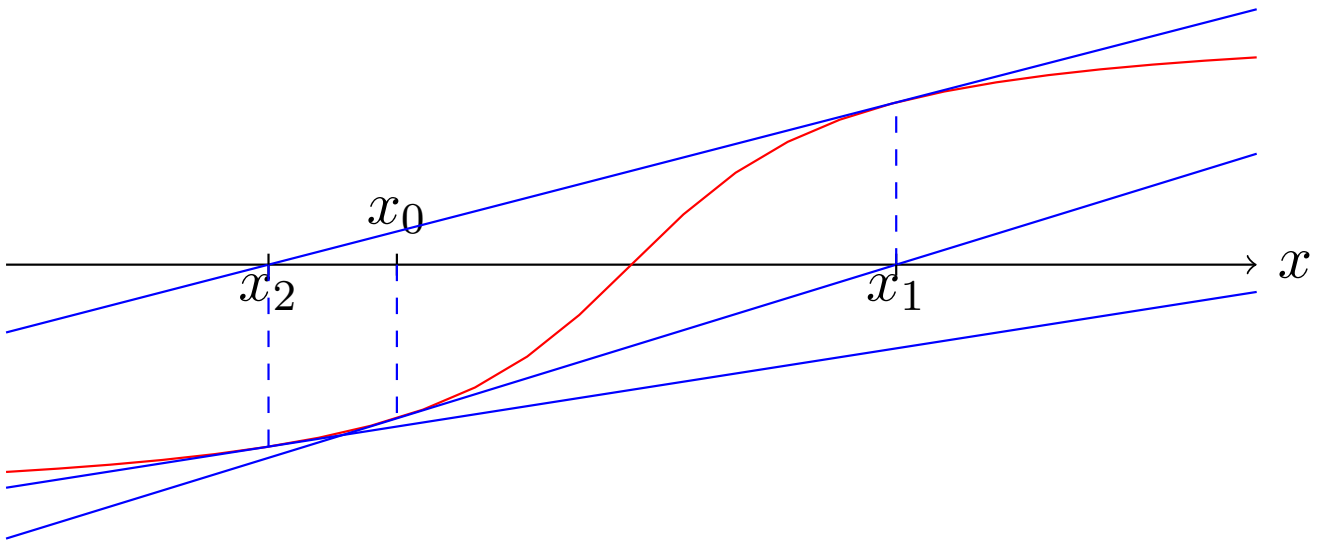
Exemples où la Méthode de Newton ne fonctionne pas (2)



La méthode peut provoquer des cycles

ici on a $x^* \neq x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$ et $x^* \neq x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$

Exemples où la Méthode de Newton ne fonctionne pas (3)



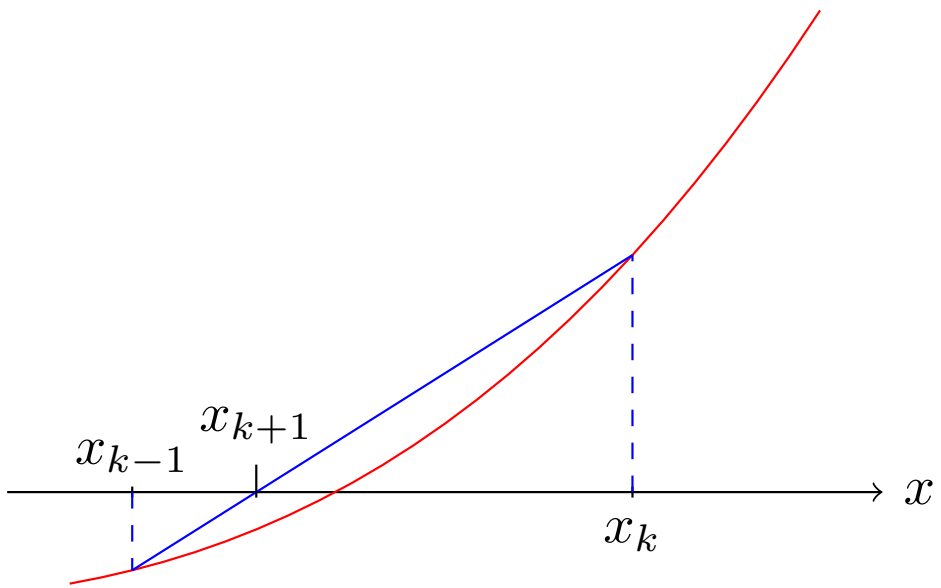
La méthode peut diverger complètement.

La méthode de la sécante

La méthode de la sécante est dérivée de celle de Newton où l'on remplace la dérivée par une sécante. Elle est utile lorsque l'on ne connaît pas la dérivée.

- On initialise l'algorithme en prenant deux points x_0 et x_1 proche de la solution recherchée
- On itère par :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$



Quelle méthode utiliser ?

Il n'y a pas de méthode universelle.

- Si on cherche simplicité et robustesse : Dichotomie. Elle fonctionne tout le temps elle est moins rapide mais c'est relatif pour les besoins que l'on a.
- Si on connaît une bonne approximation d'un zéro et on cherche la rapidité. On utilise une méthode du type Newton.
  - Si on connaît f', on utilise la méthode de Newton.
  - Sinon on utilise la méthode de la sécante.
  - Si on connaît f'', on peut utiliser la méthode de Halley qui s'inspire de Newton (à ne pas connaître).
- On peut aussi utiliser des méthodes mixtes. Location d'un zéro par dichotomie puis Newton. Si Newton ne converge pas, on peut reprendre une phase de Dichotomie.

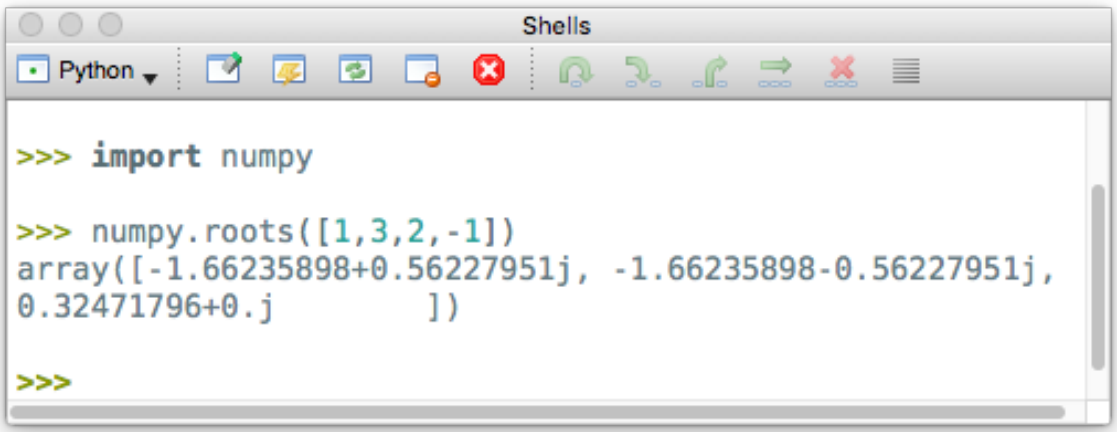
III Python

Les bibliothèques Numpy et Scipy.optimize

La plupart du temps, il est déraisonnable de coder soi même une méthode de résolutions qui existe déjà et a probablement été plus testée et optimisé que votre fonction.

Recherche de zéro avec Numpy

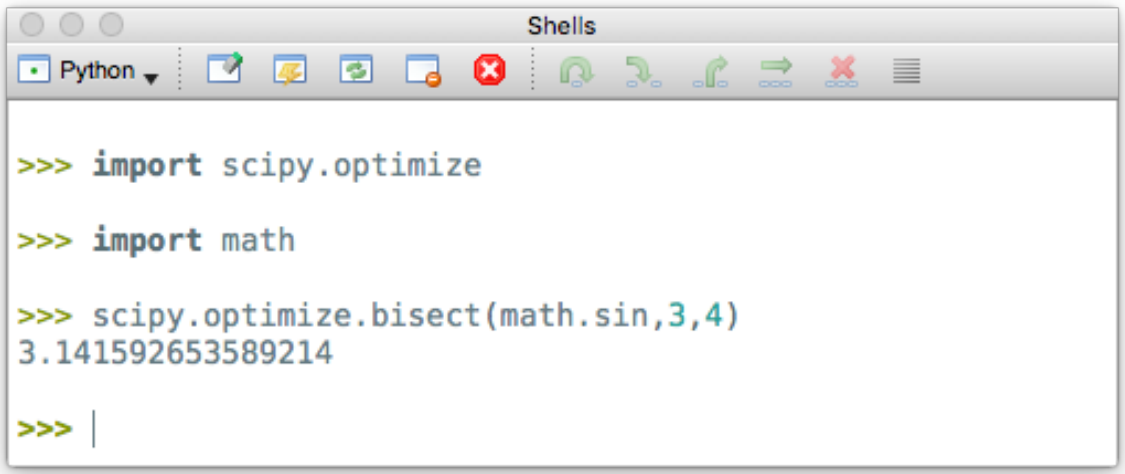
La fonction numpy.roots détermine les racines d'un polynôme donné par la liste de ses coefficients.



Elle fournit les racines complexes, le nombre imaginaire i étant noté j.

Dichotomie : scipy.optimize.bisect

La méthode dichotomique est implémentée dans scipy.optimize.bisect



On obtient ici la solution de $\sin(x) = 0$ avec x compris entre 3 et 4

Newton : scipy.optimize.newton

La méthode de Newton est programmée dans scipy.optimize.newton. Il est à noter que si on ne donne pas la dérivée, c'est en fait la méthode de la sécante qui est appliquée.

```
>>> scipy.optimize.newton(math.sin,3, math.cos)
3.141592653589793
```

On peut aussi utiliser une méthode hybride (celle de Brent) qui mélange la méthode de la sécante avec la méthode de dichotomie.

```
>>> scipy.optimize.brentq(math.sin,3,4)
3.141592653589793
```