On résume souvent le métier de mathématicien à la résolution des équations ; ce n'est pas absurde mais il ne fait pas que les résoudre, il les ***étudie****.*
On sait déjà qu'avec l'algèbre, on peut résoudre des équations polynomiales (on connaît des formules pour les équations de degré 2 *voir* 3*). Il existe des équations plus compliquées avec des degrés supérieurs, des variables en plus et d'autres contraintes.*
En analyse (étude des fonctions), on va étudier des équations avec dérivées. On appelle ça des ***équations différentielles****.*
Il s'agit d'un des domaines les plus vivants des mathématiques. Les applications sont nombreuses :

- *En mécanique avec des problèmes de mouvement (accélération, vitesse et position)*
- *En chimie où la vitesse de disparition d'un composé est proportionnelle à sa concentration à l'instant t.*
- *En economie-biologie, par exemple, Thomas Malthus a modélisé la croissance de la population par une équation liant croissance et nombre d'habitants.*

La plupart du temps on ne dispose pas de solutions analytiques. On peut alors définir de nouvelles fonctions, par exemple, une célebre fonctions nommé fonction d'Airy Ai, introduit lors de calculs d'optique, notamment lors de l'étude de l'arc-en-ciel est défini comme l'une des solutions de l'équation $y'' - xy = 0$*.*
On peut aussi et c'est suffisant obtenir de bonnes approximations des solutions à partir d'algorithme.
La plupart du temps on ne dispose pas de solutions analytiques. On peut néanmoins obtenir de bonnes approximations des solutions à partir d'algorithme. Dans ce TP, nous allons voir une méthode pour approximer des solutions d'équations du type

$$\forall x \in I;\ y'(x) = f(y(x), x) \text{ où } I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ et } f \text{ une fonction réelle sur } I \times \mathbb{R}.$$

L'equation le plus simple est $y' = y$ *avec* $y(0) = 1$ *qui admet* exp *comme solution.*

Exercice 1 :

Avant de décrire la méthode générale, on va la découvrir pour calculer le nombre e.
exp est solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$.

Avec un pas de $0,5$

1. Avec un pas de $0,5$
   (a) Tangente en 0.
      α) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe exp en 0.
      β) Par définition, la tangente et la courbe sont « très proche » autour de 0. Utiliser cette propriété pour déterminer une valeur approchée de $\exp(0,5)$.
   (b) On connaît maintenant une valeur approximative de $\exp(0,5)$.
      α) Déterminer une expression (approximative) de la tangente à la courbe de exp en $0,5$
      β) En déduire une valeur approchée de $\exp(1)$.
2. Avec un pas de $0,1$
   (a) À l'aide de l'expression de la tangente en 0, donner une valeur approchée de $\exp(0,1)$.
   (b) Montrer à l'aide de l'expression de la tangente à la courbe de exp en $0,1$ que $\exp(0,2) \approx \exp(0,1) \times 1,1$.
   (c) Montrer de même que $\exp(0,3) \approx \exp(0,2) \times 1,1$.
   (d) À l'aide d'une suite dont on donnera le premier terme et la relation de récurrence, déterminer une valeur approchée de $\exp(1)$
3. Un algorithme
   (a) Écrire une fonction **euler_exp** qui prend en argument un entier n et renvoie une approximation de $\exp(1)$ avec un pas de n.
   (b) Programmer cet algorithme en Python. Pour quelle valeur de n obtient-on une bonne approximation de $\exp(1)$?
   (c) Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie une liste contenant des approximations de $\exp(0)$, $\exp(\frac{1}{n})$, $\exp(\frac{2}{n})$, $\cdots$, $\exp(\frac{n-1}{n})$ et $\exp(1)$.

(d) Afficher les courbes de la fonction exp et l'approximation de exp que l'on a calculée avec 20, 50 puis 100 points. Que peut-on dire ?

Principe de la méthode d'Euler :
Revenons au principe général. On souhaite obtenir une approximation numérique de la solution d'une équation de la forme $y'(t) = f(y(t), t)$pour tout $t \in [a; b]$ où a et b sont des réels tels que $b > a$.
On va tenter d'approcher y en un certain nombre de points répartis sur l'intervalle $[a; b]$.
La principe de la méthode d'Euler consiste à calculer une approximation y_k des $y(t_k)$, avec $t_k = a+kh$, où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est un pas qu'il conviendra d'ajuster. De façon très simples, si on écrit :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(u)du = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(u), u)du \approx hf(y(t_k), t_k),$$

alors on obtient la méthode d'Euler : les approximations sont calculées de proche en proche via la formule suivante $\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(y_k, t_k)}$. On initialise bien entendu avec $y_0 = y(a)$ qui sera la seule valeur « exacte » calculée.
Graphiquement, cela revient à faire des approximations successives de courbes par des tangentes.

Exercice 2 :

On souhaite résoudre l'équation $y'(x) = -xy(x)$ avec comme condition initiale $y(0) = 1$.

1. Écrire la fonction **euler_exp2** qui prend comme argument un réel positif b et un entier n et renvoie une liste contenant les approximations de la solution sur $[0; b]$ avec un pas de $\frac{b}{n}$.
2. Adapter la fonction précédente pour qu'elle renvoie une approximation sur $[-b; b]$.
3. Afficher la courbe de la solution sur $[-5; 5]$ en utilisant cette approximation. Quelle courbe reconnaît-t'on ? Quelle est la solution de cette équation ?

Pour généraliser le procédé, on peut écrire la fonction **euler** suivante :

```
def euler(f, a, b, y0, h):
        y = y0
        t = a
        Ly = [y]
        Lt = [t]
        while t+h <= b :
                y += h * f(y,t)
                Ly += [y]
                t += h
                Lt += [t]
        return Lt, Ly
```

Cette fonction prend en entrée une fonction f, les bornes a et b de l'intervalle d'étude, la condition initiale y_0 et le pas h. Plus précisément : avec ces données, la fonction va déterminer les approximations de la solution $y'(t) = f(y(t), t)$ avec la condition initiale $y(a) = y_0$, en rendant un tableau de temps et un tableau de valeurs approchées par la méthode d'Euler. Les temps sont les $a + kh$ majorée par b.

Exercice 3 :

1. Déterminons une approximation de exp
   (a) On sait que exp est solution de $y' = y$. On a donc $f(y(t), t) = y(t)$. Définir la fonction f_0 qui prend en argument t et y et renvoie y.
   (b) Utiliser cette fonction afin que **euler** renvoie la solution de exp sur $[0; 1]$
2. Utiliser la fonction **euler** pour avoir une approximation de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite ($x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$).

Exercice 4 :

Comme souvent en **Python**, il existe des fonctions qui permettent de résoudre nos problèmes. Ici il s'agit de **odeint** dans **scipy.integrate**. On peut commencer par charger juste cette fonction :

from scipy.integrate import odeint

Cette fonction s'appelle de la façon suivante **odeint(f,y0,L)** et permet de résoudre l'équation $y' = f(y(t), t)$ sur un intervalle $[a; b]$. L est la liste composée des éléments $[a, a + h, a + 2h, \cdots, b]$ (on doit donc d'abord construire L).

1. Tester cette fonction avec nos deux exemples.
2. Comparer les résultats.

Exercice 5 :

On se donne l'équation différentielle $y'' = -y$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On peut montrer qu'il existe une unique solution à cette équation.

Une méthode pour la résoudre est de transformer cette équation d'ordre 2 à un système d'équations d'ordre 1. Soit f la dérivée de y, on remarque alors que y est solution du système $\begin{cases} y' = f \\ f' = -y \end{cases}$ avec $y(0) = 0$ et $f(0) = 1$.

1. Adapter la méthode d'Euler pour résoudre cette équation.
2. Tracer la solution de cette équation sur $[0; 5]$. Quelle solution reconnaît-on ?