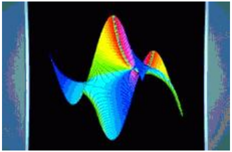
Développement en Séries de Tchebychev pour les solutions d'équations différentielles à coefficients polynomiaux

Alexandre Benoit,
Travail en commun avec Bruno Salvy

Centre de recherche commun INRIA-MSR
Projet Algorithms

25 mai 2009



I Introduction

Comment évaluer une fonction sur [-1,1]?

Deux représentations possibles pour f:

- En série de Taylor

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \; c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

- ou en série de Tchebychev

$$f = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n T_n(x),$$

$$t_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_n(t) \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Comment évaluer une fonction sur [-1,1]?

Deux représentations possibles pour f:

- En série de Taylor

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \; c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

- ou en série de Tchebychev

$$f = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n T_n(x),$$

$$t_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_n(t) \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} d$$

Rappel : Polynômes de Tchebychev

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$T_{n+1} = 2x T_n - T_{n-1}$$

$$T_n(cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Comment évaluer une fonction sur [-1,1]?

Deux représentations possibles pour f:

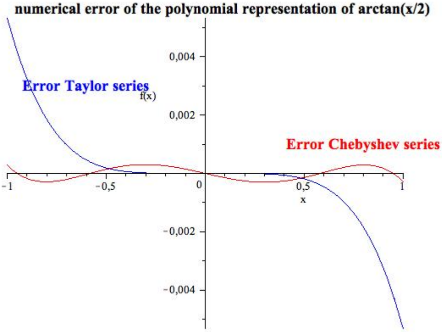
- En série de Taylor

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \; c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

- ou en série de Tchebychev

$$f = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n T_n(x),$$

$$t_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_n(t) \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$



Projets en Matlab utilisant les séries de Tchebychev pour représenter les fonctions:
Chebfun et Miscfun

Comment évaluer une fonction sur [-1,1]?

Deux représentations possibles pour f:

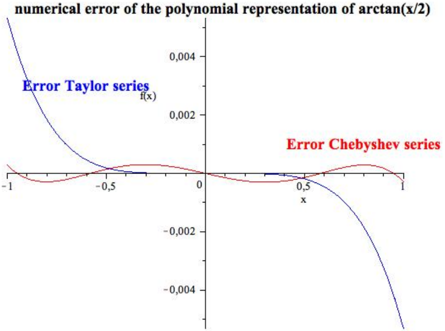
- En série de Taylor

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,\ c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

- ou en série de Tchebychev

$$f = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n T_n(x),$$

$$t_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_n(t) \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$



Comment calculer les t_n?

Cas général: Calcul numérique des intégrales. Mais c'est lent.

Calcul des coefficients avec des récurrences

Théorème (années 60)

Si f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors les coefficients de Tchebychev sont annulés par une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux

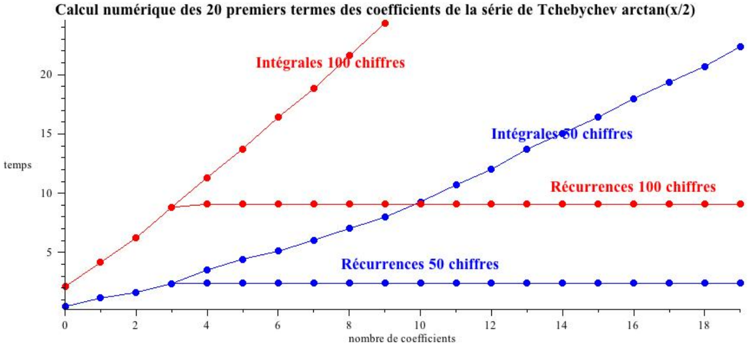
Calcul des coefficients avec des récurrences

Théorème (années 60)

Si f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors les coefficients de Tchebychev sont annulés par une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux

Applications:

- Calcul numérique des coefficients.



Calcul des coefficients avec des récurrences

Théorème (années 60)

Si f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors les coefficients de Tchebychev sont annulés par une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux

Applications:

- Calcul numérique des coefficients.
- Calcul des formes closes des coefficients.

$$f(x) = \arctan(x/2)$$

```
> def:=(4+x^2)*diff(y(x),x$2)+2*x*diff(y(x),x);
```

$$def := \left(4+x^2\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+2x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) \quad (15)$$

```
> rec:=Chebyshev:-diffeqtorecchebyshev(def,y(x),t(n))=0;
```

$$rec := n\,t(n) + (36+18n)\,t(n+2) + (n+4)\,t(n+4) = 0 \quad (16)$$

```
> r:=simplify(evalc(allvalues(rsolve({rec,seq(t(i)=1/Pi*int(arctan(x/2)*
T(i,x)/sqrt(1-x^2),x=-1..1),i=0..3)},t(n))))) assuming n::integer;
```

$$r := \begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{\left(-2+\sqrt{5}\right)^{n+1}\left(\sqrt{5}+2\right)\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)}{n} & \mathit{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

Etat de l'art

- Clenshaw (1957): Méthode numérique pour calculer les coefficients de Tchebychev sans calculer les intégrales.
- Fox and Parker (1968): Méthode pour le calcul des récurrences de Tchebychev de petits ordres.
- Paszkowski (1975): Algorithme pour calculer une récurrence de Tchebychev.
- Lewanowicz (1976): Algorithme pour calculer une récurrence de Tchebychev d'ordre inférieur dans certain cas.
- Rebillard (1998): Nouvel algorithme pour calculer les récurrences de Tchebychev.
- Rebillard et Zakrajšek (2006): Algorithme pour calculer des récurrences de Tchebychev d'ordres inférieurs à celles calculées par Lewanowicz.

Nouveaux résultats (2009)

- Présentation simple et unifiée des algorithmes existants en utilisant les fractions d'opérateurs de récurrence.

Nouveaux résultats (2009)

- Présentation simple et unifiée des algorithmes existants en utilisant les fractions d'opérateurs de récurrence.
- Analyse de complexité des algorithmes existants (ordre k, degré k)
  - Algorithmes de Paszkowski et Lewanowicz : $O(k^4)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.
  - Algorithme de Rebillard: $O(k^5)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.

Nouveaux résultats (2009)

- Présentation simple et unifiée des algorithmes existants en utilisant les fractions d'opérateurs de récurrence.
- Analyse de complexité des algorithmes existants (ordre k, degré k)
  - Algorithmes de Paszkowski et Lewanowicz : $O(k^4)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.
  - Algorithme de Rebillard: $O(k^5)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.
- Nouvel algorithme plus rapide : $O(k^\omega)$ opérations arithmétiques. Ici, ω est l'exposant du produit matricielle. $(\omega \leq 3)$.

Nouveaux résultats (2009)

- Présentation simple et unifiée des algorithmes existants en utilisant les fractions d'opérateurs de récurrence.
- Analyse de complexité des algorithmes existants (ordre k, degré k)
  - Algorithmes de Paszkowski et Lewanowicz : $O(k^4)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.
  - Algorithme de Rebillard: $O(k^5)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.
- Nouvel algorithme plus rapide : $O(k^\omega)$ opérations arithmétiques. Ici, ω est l'exposant du produit matricielle. ($\omega \leq 3$).
- Implantation des algorithmes en Maple.

II Fractions d'opérateurs de récurrence

Morphisme d'anneaux d'opérateurs ($S \cdot u_n = u_{n+1}$)

Séries de Taylor($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$
$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs ($S \cdot u_n = u_{n+1}$)

Séries de Taylor($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$
$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs $(S \cdot u_n = u_{n+1})$

Séries de Taylor($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$
$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$(4 + x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4 + S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs ($S \cdot u_n = u_{n+1}$)

Séries de Taylor($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$
$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs ($S \cdot u_n = u_{n+1}$)

Base Monomial $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Séries de Tchebychev

$$xT_n(x) = 1/2\,(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))$$
$$T_n'(x) = \frac{n\,(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$x \mapsto X := \frac{S+S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1}-S}.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2})},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs $(S \cdot u_n = u_{n+1})$

Base Monomial $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Séries de Tchebychev

$$xT_n(x) = 1/2\,(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))$$
$$T_n'(x) = \frac{n\,(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$x \mapsto X := \frac{S+S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1}-S}.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs $(S \cdot u_n = u_{n+1})$

Base Monomial $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Séries de Tchebychev

$$xT_n(x) = 1/2\,(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))$$
$$T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$(4 + x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs ($S \cdot u_n = u_{n+1}$)

Base Monomial $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Séries de Tchebychev

$$xT_n(x) = 1/2\,(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))$$
$$T_n'(x) = \frac{n\,(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2+18n+(n-2)S^{-2}\right)}{((n-1)S^2-2n+(n+1)S^{-2})},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs ($S \cdot u_n = u_{n+1}$)

Base Monomial $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Séries de Tchebychev

$$xT_n(x) = 1/2\,(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))$$
$$T_n'(x) = \frac{n\,(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

$$x \mapsto X := \frac{S+S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S-(n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1}-S}.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Polynôme d'Ore : Structure pour les opérateurs de récurrence.

- $\sum a_i(n)u_{n+i}$ est représenté par $\sum a_i(n)S^i$.
- Ces polynômes ne sont pas commutatifs.
- La multiplication est définie par: $Sn = (n+1)S$.
- L'anneau des polynômes est dénoté par $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$.

Polynôme d'Ore : Structure pour les opérateurs de récurrence.

- $\sum a_i(n)u_{n+i}$ est représenté par $\sum a_i(n)S^i$.
- Ces polynômes ne sont pas commutatifs.
- La multiplication est définie par: $Sn = (n+1)S$.
- L'anneau des polynômes est dénoté par $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$.
- Propriété principale: Le degré en S d'un produit de polynômes est la somme des degrés de ses facteurs.
  - Algorithme pour la division euclidienne (à droite ou à gauche).
  - Algorithme pour le calcul du PGCD, du PPCM et des cofacteurs (à droite ou à gauche). (Ore 33)

Polynôme d'Ore : Structure pour les opérateurs de récurrence.

- $\sum a_i(n)u_{n+i}$ est représenté par $\sum a_i(n)S^i$.
- Ces polynômes ne sont pas commutatifs.
- La multiplication est définie par: $Sn = (n+1)S$.
- L'anneau des polynômes est dénoté par $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$.
- Propriété principale: Le degré en S d'un produit de polynômes est la somme des degrés de ses facteurs.
  - Algorithme pour la division euclidienne (à droite ou à gauche).
  - Algorithme pour le calcul du PGCD, du PPCM et des cofacteurs (à droite ou à gauche). (Ore 33)

Exemple : Algorithme du PGCDG

INPUT Opérateurs de récurrence A et B
OUTPUT Le "plus grand" G tel que $A = G\tilde{A}$ et $B = G\tilde{B}$

Exemple : Algorithme du PPCMG

INPUT Opérateurs de récurrence A et B
OUTPUT U et V tel que l'opérateur $UA = VB$ soit d'ordre minimal

Fractions d'opérateurs de récurrence (Ore 1933)

L'anneau $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$ possède un corps de fractions.
Le corps de fractions de $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$ est défini par:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \exists (U, V) \text{ tel que } UA = VC \text{ et } UB = VD.$$

Fractions d'opérateurs de récurrence (Ore 1933)

L'anneau $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$ possède un corps de fractions.
Le corps de fractions de $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$ est défini par:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \exists (U,V) \text{ tel que } UA = VC \text{ et } UB = VD.$$

- Addition:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{UA}{UB} + \frac{VC}{VD} = \frac{UA + VC}{UB},$$

Fractions d'opérateurs de récurrence (Ore 1933)

L'anneau $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$ possède un corps de fractions.
Le corps de fractions de $\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$ est défini par:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \exists (U, V) \text{ tel que } UA = VC \text{ et } UB = VD.$$

- Addition:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{UA}{UB} + \frac{VC}{VD} = \frac{UA + VC}{UB},$$

- Multiplication:

$$\frac{D}{C} \cdot \frac{A}{B} = \frac{VD}{VC} \cdot \frac{UA}{UB} = \frac{UA}{VC}.$$

Application aux récurrences de Tchebychev

Définition

Soit φ "le morphisme de Tchebychev" de l'anneau des opérateurs différentiels dans l'anneau des opérateurs de récurrence:

$$\varphi(x) = 1/2\left(S + S^{-1}\right) \text{ et } \varphi\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{2n}{-S + S^{-1}}.$$

Théorème (BenoitSalvy2009)

Soit f une fonction et L un opérateur différentiel d'ordre k tel que: $L \cdot f = 0$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^k$ et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f^{(k)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \text{ est convergent;}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^k f^{(k)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \text{ est convergent et } (1-x^2)^i | p_i,\ i = 0, \dots, k.$$

Un numérateur de la fraction d'opérateur de récurrence $\varphi(L)$ est un opérateur de récurrence annulant les coefficients de Tchebychev de f.

Exemple: $\sqrt{1-x^2}$

$f=\sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x+(1-x^2)\frac{d}{dx}$.

$$\varphi\left(x+(1-x^2)\frac{d}{dx}\right)=\frac{S+S^{-1}}{2}+\left(1-\frac{S^2+2+S^{-2}}{4}\right)\frac{2n}{-S+S^{-1}}$$

Exemple: $\sqrt{1-x^2}$

$f = \sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x + (1-x^2)\frac{d}{dx}$.

$$\varphi\left(x + (1-x^2)\frac{d}{dx}\right) = \frac{S+S^{-1}}{2} + \left(1 - \frac{S^2+2+S^{-2}}{4}\right)\frac{2n}{-S+S^{-1}}$$

$$= \frac{\left(-S+S^{-1}\right)\left(S+S^{-1}\right)}{2\left(-S+S^{-1}\right)} - \frac{(n+2)S^2+2n-(n-2)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)}$$

Exemple: $\sqrt{1-x^2}$

$f=\sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x+(1-x^2)\frac{d}{dx}$.

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(x+(1-x^2)\frac{d}{dx}\right) &= \frac{S+S^{-1}}{2}+\left(1-\frac{S^2+2+S^{-2}}{4}\right)\frac{2n}{-S+S^{-1}} \\
&= \frac{\left(-S+S^{-1}\right)\left(S+S^{-1}\right)}{2(-S+S^{-1})}-\frac{(n+2)S^2+2n-(n-2)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)} \\
&= \frac{-(n+3)S^2+2n-(n-3)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)}
\end{aligned}
$$

Exemple: $\sqrt{1-x^2}$

$f = \sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x + (1-x^2)\frac{d}{dx}$.

$$\varphi\left(x + (1-x^2)\frac{d}{dx}\right) = \frac{S+S^{-1}}{2} + \left(1 - \frac{S^2+2+S^{-2}}{4}\right)\frac{2n}{-S+S^{-1}}$$
$$= \frac{\left(-S+S^{-1}\right)\left(S+S^{-1}\right)}{2(-S+S^{-1})} - \frac{(n+2)S^2+2n-(n-2)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)}$$
$$= \frac{-(n+3)S^2+2n-(n-3)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)}$$

Les coefficients de Tchebychev c_n de f, vérifient la relation de récurrence:

$$(n+3)c_{n+2} - 2nc_n + (n-3)c_{n-2} = 0.$$

Sans les hypothèses : $\arccos(x)$

$f = \arccos(x)$ est annulée par l'opérateur différentiel :
$L = x\frac{d}{dx} - (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}$.

Il est facile de vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f'}{\sqrt{1-x^2}}dx$ n'est pas convergent.

Sans les hypothèses : $\arccos(x)$

$f = \arccos(x)$ est annulée par l'opérateur différentiel :
$L = x\frac{d}{dx} - (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}$.

Il est facile de vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f'}{\sqrt{1-x^2}}dx$ n'est pas convergent.

```
> diffeqtorecchebyshev(L,y(x),u(n));
```

$$u(n)\ n$$

Sans les hypothèses : arccos(x)

f = arccos(x) est annulée par l'opérateur différentiel :
$L = x\frac{d}{dx} - (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}$.

Il est facile de vérifier que $\int_{-1}^{1} \frac{f'}{\sqrt{1-x^2}} dx$ n'est pas convergent.

```
> diffeqtorecchebyshev(L,y(x),u(n));
                                        u(n) n
```

f est aussi solution de $(1-x^2)L$ qui vérifie les hypothèses.

Sans les hypothèses : arccos(x)

$f = \arccos(x)$ est annulée par l'opérateur différentiel :
$L = x\frac{d}{dx} - (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}$.

Il est facile de vérifier que $\int_{-1}^{1} \frac{f'}{\sqrt{1-x^2}} dx$ n'est pas convergent.

```
> diffeqtorecchebyshev(L,y(x),u(n));
```

$$u(n)\, n$$

f est aussi solution de $(1-x^2)L$ qui vérifie les hypothèses.

```
> diffeqtorecchebyshev((1-x^2)*L,y(x),u(n));
```

$$n^2\, u(n) + \left(-2\, n^2 - 8 - 8\, n\right) u(n+2) + \left(n^2 + 8\, n + 16\right) u(n+4)$$

Normalisation

Definition

Une fraction $\frac{A}{B}$ est appelée normalisée quand le PGCDG de A et B est 1.

Normalisation

Definition

Une fraction $\frac{A}{B}$ est appelée normalisée quand le PGCDG de A et B est 1.

Exemple: La fraction normalisée de $\varphi\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$f = \sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x + (1-x^2)\frac{d}{dx}$.
Nous avons:

$$\varphi\left(-x + (-1+x^2)\frac{d}{dx}\right) = \frac{-(n+3)S^2 + 2n - (n-3)S^{-2}}{2\left(-S + S^{-1}\right)}$$

Normalisation

Definition

Une fraction $\frac{A}{B}$ est appelée normalisée quand le PGCDG de A et B est 1.

Exemple: La fraction normalisée de $\varphi\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$f=\sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x+(1-x^2)\frac{d}{dx}$.
Nous avons:

$$\varphi\left(-x+(-1+x^2)\frac{d}{dx}\right)=\frac{-(n+3)S^2+2n-(n-3)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)}$$
$$=\frac{\left(-S+S^{-1}\right)\left((n+2)S-(n-2)S^{-1}\right)}{2\left(-S+S^{-1}\right)}.$$

Normalisation

Definition

Une fraction $\frac{A}{B}$ est appelée normalisée quand le PGCDG de A et B est 1.

Exemple: La fraction normalisée de $\varphi\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$f=\sqrt{1-x^2}$ est annulée par l'opérateur différentiel : $x+(1-x^2)\frac{d}{dx}$.
Nous avons:

$$\varphi\left(-x+(-1+x^2)\frac{d}{dx}\right)=\frac{-(n+3)S^2+2n-(n-3)S^{-2}}{2\left(-S+S^{-1}\right)}$$
$$=\frac{\left(-S+S^{-1}\right)\left((n+2)S-(n-2)S^{-1}\right)}{2(-S+S^{-1})}.$$

Ordre plus petit

$$\Rightarrow (n+2)c_{n+1}-(n-2)c_{n-1}=0.$$

III Algorithmes

Algorithme de Lewanowicz (1976)

Horner+Normalisation à chaque étape.
Exemple avec $f = \sqrt{1 - x^2}$

$$(1 - x^2)\frac{d}{dx} + x.$$

Algorithme de Lewanowicz (1976)

Horner+Normalisation à chaque étape.
Exemple avec $f = \sqrt{1-x^2}$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx} + x.$$

$$\varphi(1-x^2) = \frac{-S^2+2-S^{-2}}{4} = \frac{(S+S^{-1})(-S+S^{-1})}{4}$$

Algorithme de Lewanowicz (1976)

Horner+Normalisation à chaque étape.
Exemple avec $f = \sqrt{1-x^2}$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx} + x.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1-x^2) &= \frac{-S^2+2-S^{-2}}{4} = \frac{(S+S^{-1})(-S+S^{-1})}{4} \\
\varphi(1-x^2)\varphi\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{(S+S^{-1})\color{red}{(-S+S^{-1})}}{4}\,\frac{2n}{\color{red}{-S+S^{-1}}} \\
&= \frac{\left((n+1)S-(n-1)S^{-1}\right)}{2}
\end{aligned}$$

Algorithme de Lewanowicz (1976)

Horner+Normalisation à chaque étape.
Exemple avec $f = \sqrt{1-x^2}$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx} + x.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1-x^2) &= \frac{-S^2+2-S^{-2}}{4} = \frac{(S+S^{-1})(-S+S^{-1})}{4} \\
\varphi(1-x^2)\varphi\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{((n+1)S-(n-1)S^{-1})}{2} \\
\varphi(1-x^2)\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)+\varphi(x) &= \frac{((n+1)S-(n-1)S^{-1})}{2} + \frac{S+S^{-1}}{2} \\
&= \frac{(n+2)S-(n-2)S^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

Algorithme de Lewanowicz (1976)

Horner+Normalisation à chaque étape.
Exemple avec $f = \sqrt{1-x^2}$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx} + x.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1-x^2) &= \frac{-S^2+2-S^{-2}}{4} = \frac{(S+S^{-1})(-S+S^{-1})}{4} \\
\varphi(1-x^2)\varphi\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{((n+1)S-(n-1)S^{-1})}{2} \\
\varphi(1-x^2)\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)+\varphi(x) &= \frac{(n+2)S-(n-2)S^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

Une récurrence vérifiée par les coefficients de Tchebychev de f est:

$$(n+2)\,c_{n+1} - (n-2)\,c_{n-1} = 0$$

Algorithmes de Paszkowski (1975) et Rebillard (1998)

Observation: si $D = \varphi(\frac{d}{dx}) = \frac{2n}{-S+S^{-1}}$ alors D^{-1} est un polynôme.

- INPUT :

$$L = \sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i$$

- OUTPUT : Un numérateur de $\varphi(L)$

Calcul seulement avec des polynômes.

Algorithmes de Paszkowski (1975) et Rebillard (1998)

Observation: si $D = \varphi(\frac{d}{dx}) = \frac{2n}{-S+S^{-1}}$ alors D^{-1} est un polynôme.

- INPUT :

$$L = \sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i$$

- OUTPUT : Un numérateur de $\varphi(L)$

Calcul seulement avec des polynômes.

Paszkowski

Calcul des $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i = \frac{\sum_{i=0}^{k} D^{-k+i} q_i(X)}{D^{-k}}.$$

Algorithmes de Paszkowski (1975) et Rebillard (1998)

Observation: si $D = \varphi(\frac{d}{dx}) = \frac{2n}{-S+S^{-1}}$ alors D^{-1} est un polynôme.

- INPUT :

$$L = \sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i$$

- OUTPUT : Un numérateur de $\varphi(L)$

Calcul seulement avec des polynômes.

Paszkowski

Calcul des $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i = \frac{\sum_{i=0}^{k} D^{-k+i} q_i(X)}{D^{-k}}.$$

Rebillard

$$X_k := D^{-k} X D^k.$$

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i = \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i(X_k) D^{-k+i}}{D^{-k}}.$$

Notre nouvel algorithme: Diviser pour régner

D^{-i} est de bidegré $(2i, 2i)$.

Algorithme nouveau et rapide

Étape 1: Calcul des $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

Étape 2 : Diviser pour régner

$$\sum_{i=0}^{k} D^{-k+i} q_i(X) =$$

$$D^{-\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} D^{-\frac{k}{2}+i} q_i(X) + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} D^{-k+i} q_i(X).$$

Coût de l'algorithme : $C(k,d) = O(dk^{\omega-1})$

Degré des polynômes: d

$$
\begin{array}{rccc}
P = & q_k(X) + \cdots + D^{-k/2-1} q_{k/2+1}(X) & + & D^{-k/2} q_{k/2}(X) + \cdots + D^{-k} q_0(X) \\
= & P_1 & + & D^{-k/2} P_2
\end{array}
$$

Coût de l'algorithme : $C(k,d) = O(dk^{\omega-1})$

Degré des polynômes: d

$$\begin{aligned} P = & \quad q_k(X) + \cdots + D^{-k/2-1} q_{k/2+1}(X) & + & \quad D^{-k/2} q_{k/2}(X) + \cdots + D^{-k} q_0(X) \\ = & \quad P_1 & + & \quad D^{-k/2} P_2 \end{aligned}$$

- Calcul de $P_1,\ P_2$: $2C(k/2, d)$
- Calcul de $D^{-k/2} P_2$

Coût de l'algorithme : $C(k,d) = O(dk^{\omega-1})$

Degré des polynômes: d

$$\begin{aligned} P = \quad & q_k(X) + \cdots + D^{-k/2-1} q_{k/2+1}(X) \quad + \quad D^{-k/2} q_{k/2}(X) + \cdots + D^{-k} q_0(X) \\ = \quad & P_1 \quad + \quad D^{-k/2} P_2 \end{aligned}$$

- Calcul de $P_1,\ P_2$: $2C(k/2,d)$
- Calcul de $D^{-k/2} P_2$

Taille de $D^{-k/2}$: bidegré (k,k). Taille de P_2: bidegré $(k+2d,k)$.
Les tailles des polynômes dépendent de d qui ne varie pas avec k

Coût de l'algorithme : $C(k,d) = O(dk^{\omega-1})$

Degré des polynômes: d

$$\begin{aligned} P = & \quad q_k(X) + \cdots + D^{-k/2-1} q_{k/2+1}(X) \quad + \quad D^{-k/2} q_{k/2}(X) + \cdots + D^{-k} q_0(X) \\ = & \quad P_1 \quad + \quad D^{-k/2} P_2 \end{aligned}$$

- Calcul de P_1, P_2 : $2C(k/2,d)$
- Calcul de $D^{-k/2} P_2$

$$P_2 = P_{(2,0)} + P_{(2,1)} S^k + \cdots + P_{(2,2d/k)} S^{2d}$$

Taille de $D^{-k/2}$: bidegré (k,k). Taille de $P_{(2,i)}$: bidegré (k,k).

Coût de l'algorithme : $C(k,d) = O(dk^{\omega-1})$

Degré des polynômes: d

$$\begin{aligned} P = &\quad q_k(X)+\cdots+D^{-k/2-1}q_{k/2+1}(X) &+&\quad D^{-k/2}q_{k/2}(X)+\cdots+D^{-k}q_0(X) \\ = &\quad P_1 &+&\quad D^{-k/2}P_2 \end{aligned}$$

- Calcul de $P_1,\ P_2$: $2C(k/2,d)$
- Calcul de $D^{-k/2}P_2$

$$P_2 = P_{(2,0)} + P_{(2,1)}S^k + \cdots + P_{(2,2d/k)}S^{2d}$$

Taille de $D^{-k/2}$: bidegré (k,k). Taille de $P_{(2,i)}$: bidegré (k,k).
Coût de $D^{-k/2}P_{(2,i)}$: $O(k^{\omega})$.
Coût de $D^{-k/2}P_2$: $O(dk^{\omega-1})$.

$$C(k,d) = 2C(k/2,d) + O(dk^{\omega-1}) = O(dk^{\omega-1})$$

Complexité

Théorème

Si les degrés des p_i sont au plus k,

- *Notre algorithme: $O(k^\omega)$ opérations arithmétiques.*
- *Algorithmes de Paszkowski et Lewanowicz : $O(k^4)$ opérations arithmétiques.*
- *Rebillard : $O(k^5)$ opérations arithmétiques.*

IV Conclusion et travaux futurs

Le numérateur de la fraction normalisée n'est pas d'ordre minimal (Rebillard-Zakrajšek)

$$f(x) = (x+1)J_1(2\sqrt{1+x}),$$

Récurrence obtenue à partir du numérateur de $\varphi(L)$:

```
> L:=gfun:-holexprtodiffeq((x+1)*BesselJ(1,2*sqrt(1+x)),y(x))[1];
```

$$L := (7+4x)\,y(x) + (-4-4x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + (4x^2+8x+4)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)$$

```
> diffeqtorecchebyshev(L,y(x),u(n));
```

$$(4n+10)\,u(n) + (20n^2-2n+8n^3-1)\,u(n+1) + (40+96n^2+148n+16n^3)\,u(n+2) + (185+76n^2+8n^3 + 222n)\,u(n+3) + (4n+6)\,u(n+4)$$

Le numérateur de la fraction normalisée n'est pas d'ordre minimal (Rebillard-Zakrajšek)

$$f(x) = (x+1)J_1(2\sqrt{1+x}),$$

Récurrence obtenue à partir du numérateur de $\varphi(L)$:

```
> L:=gfun:-holexprtodiffeq((x+1)*BesselJ(1,2*sqrt(1+x)),y(x))[1];
```

$$L := (7+4x)\,y(x) + (-4-4x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + (4x^2+8x+4)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)$$

```
> diffeqtorecchebyshev(L,y(x),u(n));
```

$$(4n+10)\,u(n) + (20n^2-2n+8n^3-1)\,u(n+1) + (40+96n^2+148n+16n^3)\,u(n+2) + (185+76n^2+8n^3 + 222n)\,u(n+3) + (4n+6)\,u(n+4)$$

En calculant $\varphi(\frac{d}{dx}L)$, on obtient:

```
> L2 := (x^2+2*x+1)*diff(y(x),x,x,x)+(x+1)*diff(y(x),x,x)+(x+3/4)*diff(y(x),x)+y(x);
```

$$L2 := (x^2+2x+1)\left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) + (x+1)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(x+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + y(x)$$

```
> diffeqtorecchebyshev(L2,y(x),u(n));
```

$$(4n+10)\,u(n) + (8n^3-6n+20n^2-15)\,u(n+1) + (52n^2+33+8n^3+90n)\,u(n+2) + (4n + 2)\,u(n+3)$$

Le numérateur de la fraction normalisée ne renvoie pas l'opérateur de récurrence d'ordre minimal

Autres familles de polynômes orthogonaux

Pour les polynômes de Jacobi et de Gegenbauer, on a les mêmes relations de multiplications par x et de dérivations: On a le même algorithme.

```
> diffeqtorecgegenbauer(y(x)-diff(y(x),x),y(x),alpha,u(n));
```

$$(-n-2-\alpha)\,u(n)+\left(2\,n^2+4\,n+4\,\alpha\,n+4\,\alpha+2\,\alpha^2\right)u(n+1)+(n+\alpha)\,u(n+2)$$

Autres familles de polynômes orthogonaux

Pour les polynômes de Jacobi et de Gegenbauer, on a les mêmes relations de multiplications par x et de dérivations: On a le même algorithme.

```
> diffeqtorecgegenbauer(y(x)-diff(y(x),x),y(x),alpha,u(n));
```

$$(-n-2-\alpha)\,u(n)+\left(2\,n^2+4\,n+4\,\alpha\,n+4\,\alpha+2\,\alpha^2\right)u(n+1)+(n+\alpha)\,u(n+2)$$

Et après...

Polynômes de Laguerre et d'Hermite, fonctions de Bessel et autres fonctions spéciales

Conclusion et travaux futurs

Contributions:

- Utilisation des fractions de récurrence.
- Nouvel algorithme.
- Code Maple.
- Disponible dans le Dynamic Dictionary of Mathematical Functions.

Perspectives:

- Calcul des récurrences dans d'autres bases (Jacobi, Legendre et Laguerre polynomials, Fonctions de Bessel)
- Calcul numérique des coefficients.
- Recherche de la récurrence d'ordre minimal.