Dans ce TP, on va simuler des variables aléatoires discrète avec Python.

On utilisera la bibliothèque **random** avec les fonctions les plus adaptées pour chaque problème.

Pour chaque fonction, vous proposerez un test qui permettra de vérifier le résultat obtenu.

Exercice 1 :

(1) Écrire la fonction **simulation_de** qui renvoie un nombre aléatoire entre 1 et 6.

(2) On suppose maintenant que le dé est pipé. La probabilité d'obtenir 6 est 2/7 et la probabilité d'obtenir un autre nombre est 1/7. Écrire la fonction **simulation_de_pipe** qui prend en compte ce problème.

Exercice 2 :

(1) Écrire la fonction **Bernoulli** qui prend en argument une probabilité p et renvoie 0 avec une probabilité $1-p$ et 1 avec une probabilité p.

(2) a. Écrire la fonction **binomiale** qui prend en arguments un nombre n et une probabilité p et renvoie k avec la probabilité $P(X=k)$, où X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

b. Vérifier que l'espérance et l'écart type de la loi binomiale sont bien retrouvés avec cette simulation.

(3) La loi géométrique de paramètre p correspond au modèle suivant :

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p et celle d'échec $q=1-p$. On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. Les valeurs de X sont les entiers naturels non nuls $1, 2, 3, \cdots$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$p(X=k)=q^{k-1}p$$

a. Écrire la fonction **geometrique** qui prend en argument une probabilité et qui renvoie le nombre de tirage de Bernoulli nécessaire pour avoir un succès.

b. Vérifier que la probabilité annoncée est retrouvée par cette fonction.

c. Conjecturer l'espérance et l'écart-type de cette loi. On vérifiera sur le web que l'on a bien conjecturé.

Exercice 3 :

Au siècle des lumières, on jouait beaucoup à un jeu de hasard appelé jeu de treize, consistant à faire des paris sur une « rencontre », c'est-à-dire une carte identiquement placée dans deux jeux identiques mais mélangés au hasard. L'usage était de parier « à 7 contre 12 »sur une « rencontre »(deux cartes identiques dans les deux jeux). Euler explique d'où vient ce 7 contre 12 dans l'article : *Calcul de la probabilité du jeu de rencontres* publié en 1741. Il est à noter qu'Euler montre cette probabilité pour un nombre de cartes n quelconque (pas seulement 13).

(1) Proposer une fonction **jeu_de_rencontre** qui prend en argument n et renvoie 1 si il y a une rencontre dans un jeu à n cartes et 0 sinon.

(2) Vérifier que l'on aurait pu conjecturer les probabilités trouvées par Euler.

Exercice 4 :

Dans une classe de 45 élèves quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

On fera l'hypothèse qu'une année dure 365 jours.

(1) Proposer un modélisation de ce problème pour répondre à la question.

(2) Conjecturer le nombre d'élèves nécessaire pour que la probabilité tombe à $\frac{1}{2}$. À $\frac{99}{100}$.

(3) Expliquer pourquoi on appelle ce problème « le paradoxe des anniversaires ».

Exercice 5 :

Le jeu télévisé américain *Let's Make a Deal* est décrit de cette façon :

— Derrière chacune des trois portes se trouve soit une chèvre, soit une voiture, mais une seule porte donne sur une voiture alors que deux portes donnent sur une chèvre. La porte cachant la voiture a été choisie par tirage au sort.
— Le joueur choisit une des portes, sans que toutefois ce qui se cache derrière (chèvre ou voiture) ne soit révélé à ce stade.
— Le présentateur sait ce qu'il y a derrière chaque porte.
— Le présentateur doit ouvrir l'une des deux portes restantes et doit proposer au candidat la possibilité de changer de choix quant à la porte à ouvrir définitivement.
— Le présentateur ouvrira toujours une porte derrière laquelle se cache une chèvre, en effet :
  — Si le joueur choisit une porte derrière laquelle se trouve une chèvre, le présentateur ouvrira l'autre porte où il sait que se trouve également une chèvre.
  — Et si le joueur choisit la porte cachant la voiture, le présentateur choisit au hasard parmi les deux portes cachant une chèvre. (on peut supposer qu'un tirage au sort avant l'émission a décidé si ce serait la plus à droite ou à gauche)
— Le présentateur doit offrir la possibilité au candidat de rester sur son choix initial ou bien de revenir dessus et d'ouvrir la porte qui n'a été choisie ni par lui-même, ni par le candidat.

La question qui nous intéresse est :

Est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte ?

(1) À votre avis quelle est la probabilité la plus importante.

(2) Proposer un algorithme qui simule ce jeu (l'utilisateur sera le joueur).

(3) Tester chaque stratégie.

(4) Proposer une simulation qui permet de répondre à ce problème.

Exercice 6 :

Marc va jouer au casino. On note a la fortune de Marc (en euros, avec $a \in \mathbb{N}^*$) et b la fortune du casino (toujours en euros, avec $B \in \mathbb{N}^*$). Marc choisit un jeu du casino, dont les règles sont les suivantes : avec probabilité $p \in]0;1[$ il gagne 1 euro pris au casino, avec probabilité q il perd 1 euro en faveur du casino (on a $q = 1 - p$). Il continue à jouer de manières indépendantes, jusqu'à ce que lui ou le casino soit ruiné (=fortune réduite à zéro) si cela se produit, ou bien indéfiniment.

(1) Proposer une modélisation du problème avec une fonction **Ruine_Joueur** qui prend en paramètres un nombre a, un nombre b et la probabilité de victoire du

joueur p et qui renvoie le vainqueur 0 pour le casino et 1 pour le joueur et un nombre qui représente le nombre de parties nécessaires pour gagner.

(2) Proposer une fonction qui prend en paramètres p, a et b et renvoie une estimation de la probabilité que le joueur gagne.

(3) Proposer une fonction qui prend en paramètres p, a et b et renvoie une liste L, où $L[i]$ représente la probabilité d'avoir $i + 1$ parties avant que le jeu finisse.