Le but de ce TP est de revoir certaines opérations sur les listes avec des exemples de matrices 2×2.

Exercice 1 :

En 1637, Descartes dans le livre III de son œuvre écrit :

≪ On connoît aussi de ceci combien il peut y avoir de vraies racines et combien de fausses en chaque équation : à savoir il y en peut avoir autant de vraies que les signes + et - s'y trouvent de fois être changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes - qui s'entre-suivent. ≫

Ce qui se traduit par : le nombre des racines positives du polynôme est égal au nombre de changements de signes entre deux coefficients non nuls diminué éventuellement d'un multiple de 2 (pour tenir compte des racines complexes conjuguées qui ne sont pas decomptées), chaque racine positive étant comptée selon sa multiplicité.

En changeant la variable x en $-x$, la règle permet de trouver le nombre des racines négatives, à un multiple de 2 près, puisque l'on a permuté les racines positives et négatives par la transformation.

— Le polynôme $x^3 + x^2 - x - 1$, admet un seul changement de signes, entre le deuxième et le troisième terme. La règle de Descartes affirme donc qu'il possède exactement une racine positive. Si l'on transforme x en $-x$, on a $-x^3 + x^2 + x - 1$, qui donne deux changements de signes. Donc il y a 2 ou 0 racines négatives.

— Le polynôme $5x^5 - 7x^4 + x^3 - x + 2$, admet quatre changements de signes. Donc le polynôme peut avoir zéro, deux ou quatre racines positives.

Écrire la fonction **signe_Descartes**, qui renvoie le nombre de changements de signes dans une liste passée en paramètre.

Exercice 2 :

La suite de Fibonacci $\mathscr{F}$ est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence par les termes 0 et 1. On a donc pour $n > 1$:

$$\mathscr{F}_{n+2} = \mathscr{F}_{n+1} + \mathscr{F}_n.$$

On peut représenter matriciellement ce problème par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathscr{F}_{n+1} \\ \mathscr{F}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{F}_{n+2} \\ \mathscr{F}_{n+1} \end{pmatrix}$$

(1) On se propose d'écrire la fonction **fibo** qui prend en argument un nombre N et renvoie la liste des N premiers nombres de la suite de Fibonnacci.

(2) a. Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie la liste des termes de la suite K définie pour $n > 1$ par :

$$K_n = \frac{\mathscr{F}_{n+1}}{\mathscr{F}_n}.$$

b. Que peut-on conjecturer sur le type de cette suite ?

(3) Modifier la fonction **fibo** afin qu'elle prenne en plus en argument un nombre err et renvoie tous les termes de la liste K jusqu'à ce que $|K_{n+1} - K_n| < err$.

Exercice 3 :

(1) Écrire une fonction qui vérifie si un tableau donné en argument est dépourvu de doublons (aucune valeur n'y apparaît deux fois).

(2) Écrire une nouvelle fonction prend une liste en paramètre et renvoie la même liste sans doublon. Par exemple si la fonction a en argument $[1, 2, 5, 7, 2, 4]$ on obtiendra en retour : $[1, 2, 5, 7, 4]$.