Exercice 1 : (4 points)

(1) Un vecteur directeur de la droite (AB) a comme coordonnées $\binom{8}{2}$. Une équation de la droite est donc du type : $-2x+8y+c=0$ avec c un réel. La droite passe par A, on a donc $-2\times5+8\times4+c=0$ et donc $c=-22$. Une équation cartésienne de (AB) est donc :

$$\boxed{\text{-2x+8y-22=0.}}$$

(2) a. Un vecteur directeur de la droite a les coordonnées $\binom{2}{3}$.

b. $-3\times5+2\times4+7=-15+8+7=0$, donc A appartient à la droite $\mathscr{D}$.

c. On sait que la droite passe par A. Connaissant un vecteur directeur de cette droite, on en déduit qu'elle passe aussi par le point de coordonnées $(7;7)$. Il suffit ensuite de tracer proprement la droite passant par ces points.

(3) $\overrightarrow{AF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AF}\binom{8a+2b}{2a+3b}$. On veut donc résoudre le système :

$$\begin{cases}8a+2b &=16\\ 2a+3b &=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a+2b &=16\\ 8a+12b &=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a+2b &=16\\ -10b &=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a &=16-4\\ b &=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a &=\frac{3}{2}\\ b &=2\end{cases}$$

On a donc $\boxed{\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.}$

Exercice 2 : (6 points)

(1) a. On a $u_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ et $u_2=-\frac{5}{4}$.

b. $u_1-u_0=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$ et $u_2-u_1=-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$. La différence est différente, la suite n'est donc pas arithmétiques.

$\frac{u_1}{u_0}=-\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{5}{2}$. Le quotient est différent, donc la suite n'est pas géométrique.

(2) a.

Valeur de i		1	2	3	4
Valeur de u	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{8}$	$-\frac{29}{16}$

b. Cet algorithme affiche toutes les valeurs de u_n avec n compris entre 1 et 4.

c. Il suffit de d'échanger les lignes 11 et 12.

(3) a. On a

$$v_{n+1}=u_{n+1}+2=\frac{1}{2}u_n-1+2=\frac{1}{2}(v_n-2)+1=\frac{1}{2}v_n-1+1=\frac{1}{2}v_n.$$

La suite v est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. $v_0=u_0+2=3$, d'après le cours on sait que :

$$\boxed{v_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

Par suite, on a :

$$\boxed{u_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-2.}$$

Exercice 3 : (10 points)

Partie A

(1) On a $2\times1-1-1=0$ donc 1 est solution de l'équation.

(2) $(x-1)\times(2x^2+x+1)=2x^3+x^2+x-2x^2-x-1=2x^3-x^2-1$.

(3) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. On souhaite donc résoudre $x-1=0$ et $2x^2+x+1=0$. La première équation admet comme solution 1, pour la seconde on calcule le discriminant $\Delta=1-4<0$. Le discriminant est négatif, l'équation n'admet donc pas de solution. On a donc :

$$\boxed{S=\{1\}.}$$

Partie B

(1) Graphiquement, on remarque que les solutions de $f(x) = -1$ sont -1 et 3. Pour montrer ça, il suffit de tracer la droite d'équation $y = -1$, puis de donner l'abscisse des points d'intersections entre la droite et la courbe.

(2) La courbe a deux sommets, l'équation $f'(x) = 0$ admet donc au moins deux solutions. Par ailleurs, on voit graphiquement que la courbe n'admet pas d'autres tangentes parallèles à l'axe des abscisses. On en conclut que l'équation admet exactement deux solutions.

Les abscisses de ces sommets sont approximativement -1 et 1,7.

(3) $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 3. $A(3; -1)$ et $D(1{,}5; 5)$, donc :

$$\boxed{f'(3) = \frac{1{,}5}{6} = \frac{1}{4}}.$$

(4) L'équation de la tangente à la courbe en -3 est :

$$\boxed{y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = -7(x+3) + 5 = -7x - 16.}$$

On choisit deux points sur de la droite pour la tracer.

(5) On remplit d'abord le tableau de variations de f pour en déduire le signe de $f'(x)$

x	-3		-1		$1{,}7$		4
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	5	↘	-1	↗	$1{,}2$	↘	$-7{,}2$

Partie C

(1) g est dérivable comme fonction polynôme $g'(x) = -3x^2 + 2x + 5$.

(2) On reconnaît une fonction polynôme du second degré, on calcule donc le discriminant de ce polynôme. $\Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2$.

Les racines de ce polynôme sont $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{5}{3}$. On a donc :

x	-3		-1		$\frac{5}{3}$		4
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	20	↘	-4	↗	$\frac{148}{27}$	↘	-29

(3) Les variations de f sont les mêmes que celles de g, on retrouve le même tableau de variations que dans la partie B :

x	-3		-1		$\frac{5}{3}$		4
f	5	↘	-1	↗	$\frac{37}{27}$	↘	$-\frac{29}{4}$

Partie D

(1) a. L'équation réduite de T_a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}.$$

b. $O \in T_a$ est équivalent à $f'(a)(0-a) + f(a) = 0$.

c. $O \in T_a$ est donc équivalent à $\frac{1}{4}(-a(-3a^2 + 2a + 5) - a^3 + a^2 + 5a - 1) = 0$ c'est-à dire $2a^3 - a^2 - 1 = 0$.

(2) L'équation à résoudre est celle de la partie A, on sait que 1 est l'unique solution de cette équation. L'unique point de $\mathscr{C}$ qui a une tangente passant par l'origine a comme abscisse 1.