Durée 1 heure. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (6 points)

Donner le sens de variations des fonctions suivantes sur le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ possible :

(1) $f_1 : x \mapsto |x|$

(2) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} + 2$

(3) $f_3 : x \mapsto \frac{2}{x^2+x}$

(4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{-x^2 - x + 6}$

Exercice 2 : (5 points)

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

(1) a. Démontrer que, pout tous nombres réels a et b :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

b. Quel est le signe de $a^2 + ab + b^2$ si a et b sont de même signe ?

c. Déterminer le sens de variation de la fonction cube sur $[0; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 0]$.

(2) a. Utiliser la calculatrice pour conjecturer les positions relatives des fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto x^2$ et $f_4 : x \mapsto x^3$ sur $[0; +\infty[$.

b. Démontrer les conjectures précédentes.

Exercice 3 : (6 points)

Étude des variations de $f : x \mapsto \frac{2-2\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2}$ sur $[-1; 1]$

(1) Tracer la courbe sur votre calculatrice (pour $x \in [-1; 1]$ et $y \in [-1; 1]$).

a. Donner la valeur de $f(0)$ en utilisant le graphique.

On peut montrer qu'en 0 la fonction est bien définie (on dit prolongé par continuité). Dans la suite de l'exercice on admettra que la fonction est définie sur $[-1; 1]$

b. Conjecturer le sens de variation de f.

(2) a. Réduire au même dénominateur $\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} - 1$.

b. Simplifier l'expression suivante :

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) \times \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}.$$

c. En déduire que :

$$f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

(3) En utilisant les propriétés du cours, déduire de la composition précédente les variations de f sur $[-1; 1]$.

Exercice 4 : (4 points)

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 1{,}5u_n - 1$ et $u_0 = 3$.

(1) Calculer les trois premiers termes de u.

(2) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche les 10 premiers termes de la suite.

```
Initialisation
u prend la valeur ...
Afficher u
Traitement
Pour i allant de 1 jusqu'à ...
   u prend la valeur ...
   ...
FinPour
```

(3) Calculer u_{34} en indiquant la méthode.