Durée 1 heure. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (6 points)

Donner le sens de variations des fonctions suivantes sur le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ possible :

(1) $f_1 : x \mapsto |x|$

(2) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} + 2$

(3) $f_3 : x \mapsto \frac{2}{x^2+x}$

(4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{-x^2 - x + 6}$

Solution:

(1) La fonction est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; \infty[$

(2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc la fonction f_2 l'est aussi. On sait que $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, selon le cours il en est de même pour f_2.

(3) On sait que la définition et les variations de f_3 sont identiques à celle de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x}$, on se contentera donc d'étudier la seconde.
On a $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, donc la fonction $x \mapsto x^2 + x$ est décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$
$x^2 + x = 0$ pour $x = \{0; -1\}$, on étudie donc la fonction f_3 sur $]-\infty; -1[$ puis sur $]-1; 0[$ et enfin sur $]0; +\infty[$.
On déduit alors (en inversant les variations de $x^2 + x$) les variations de f_3 résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		0		∞
f_3		↗	‖	↗	$\frac{8}{3}$	↘	‖	↘	

(4) $-x^2 - x + 6 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-3; 2]$, la fonction f_4 est donc définie sur $[-3; 2]$.
La fonction $x \mapsto -x^2 - x + 6$ est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.
On sait que les variations de $\sqrt{u}$ sont les mêmes que celles de u.
La fonction f_4 est donc croissante sur $[-3; -\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 2]$.

Exercice 2 : (5 points)

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

(1) a. Démontrer que, pout tous nombres réels a et b :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

b. Quel est le signe de $a^2 + ab + b^2$ si a et b sont de même signe ?

c. Déterminer le sens de variation de la fonction cube sur $[0; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 0]$.

(2) a. Utiliser la calculatrice pour conjecturer les positions relatives des fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto x^2$ et $f_4 : x \mapsto x^3$ sur $[0; +\infty[$.

b. Démontrer les conjectures précédentes.

Solution: Voir la correction du DM 2.

Exercice 3 : (6 points)

Étude des variations de $f : x \mapsto \frac{2-2\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2}$ sur $[-1; 1]$

(1) Tracer la courbe sur votre calculatrice (pour $x \in [-1; 1]$ et $y \in [-1; 1]$).

a. Donner la valeur de $f(0)$ en utilisant le graphique.

On peut montrer qu'en 0 la fonction est bien définie (on dit prolongé par continuité). Dans la suite de l'exercice on admettra que la fonction est définie sur $[-1; 1]$

b. Conjecturer le sens de variation de f.

(2) a. Réduire au même dénominateur $\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} - 1$.

b. Simplifier l'expression suivante :

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right) \times \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})}{(1 - \sqrt{1 - x^2})}.$$

c. En déduire que :

$$f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

(3) En utilisant les propriétés du cours, déduire de la composition précédente les variations de f sur $[-1;1]$.

Solution:

(1) a. Graphiquement, on a l'impression que $h(0) = 0$.

b. On conjecture que la suite est décroissante sur $[-1;0]$ et croissante sur $[0;1]$.

(2) a. On a $\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

b. On remarque une identité remarquable, si bien qu'on a :

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}\right)^2}{1^2-\sqrt{1-x^2}^2} = f(x).$$

c. On déduit immédiatement des deux questions précédentes l'égalité souhaitée.

(3) Sur $[-1;1]$, $1-x^2 \geqslant 0$ et $x \mapsto 1-x^2$ est croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $[0;1]$.
On en déduit que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, puis $x \mapsto 1+\sqrt{1-x^2}$ sont aussi croissantes sur $[-1;0]$ et décroissantes sur $[0;1]$.
$1+\sqrt{1-x^2} > 0$ sur $[-1;1]$ (car $\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$), on en conclut que $x \mapsto \frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ est décroissante sur $[-1;0]$ et croissante sur $[0;1]$.
L'addition par une constante ne changeant pas les variations d'une fonction, on en déduite que f est décroissante sur $[-1;0]$ et croissante sur $[0;1]$.

Exercice 4 : (4 points)

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 1{,}5u_n - 1$ et $u_0 = 3$.

(1) Calculer les trois premiers termes de u.

(2) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche les 10 premiers termes de la suite.

```
Initialisation
u prend la valeur ...
Afficher u
Traitement
Pour i allant de 1 jusqu'à ...
   u prend la valeur ...
   ...
FinPour
```

(3) Calculer u_{34} en indiquant la méthode.

Solution:

(1) On sait que $u_0 = 3$, on a aussi $u_1 = 1{,}5u_0 - 1 = 3{,}5$ et $u_2 = 1{,}5u_1 - 1 = 4{,}25$

(2)

```
Initialisation
u prend la valeur 3
Afficher u
Traitement
Pour i allant de 1 jusqu'à 9
   u prend la valeur 1.5u-1
   Afficher u
FinPour
```

(3) En utilisant la calculatrice, on remarque que u_{34} vaut approximativement 970742.