Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (4 points)

Donner le sens de variations des fonctions suivantes sur le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ possible :

(1) $f_1 : x \mapsto |x|$

(2) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} + 2$

(3) $f_3 : x \mapsto \frac{1}{-x^2+2x+3}$

(4) $f_4 : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{-x^2+2x+3}} + 3$

Exercice 2 : (4 points)

(1) Exprimer en fonction de n la somme suivante :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

(2) Démontrer cette formule.

(3) Soit u une suite définie par $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 5$, utiliser la formule précédente pour calculer :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{25}.$$

Exercice 3 : (4 points)

(1) Pour chacune des suites suivantes préciser si elles sont arithmétiques, géométriques ou autres :

a. $u_n = 4 + 9n$

b. $v_n = (n+1)^2 - n^2$

c. $w_n = 2^n + 3$

d. $x_n = 5 \times \frac{2^n}{3^{2n+1}}$

(2) Les suites u et v sont arithmétiques. Montrer que la suite w définie par $w_n = u_n - 2v_n$ est arithmétique.

(3) Les suites u et v sont géométriques. On suppose de plus que $v_0 \neq 0$ et que la raison de v est différente de 0 Montrer que la suite w définie par $w_n = \frac{2u_n}{v_n}$ est géométrique.

Exercice 4 : (8 points)

Trois amis décident de créer un club sélectif. Une règle précise est adoptée pour adhérer à ce club. Chaque membre recruté à l'année n doit parrainer à l'année $n+1$ deux nouvelles personnes qui intégreront le club et trois personnes seront acceptées sur dossier sans être parrainées.

Une personne qui a adhéré au club est membre pour toujours (elle ne sera jamais effacée des listes).

Le but de cet exercice est de calculer, en utilisant plusieurs méthodes, le nombre de personnes inscrites dans ce club la 16-ème année.

Partie A : Modélisation de la suite

On appelle u_n le nombre de nouvelles personnes inscrites dans ce club la $n+1$-ème année. Pour la première année, on a $u_0 = 3$.

(1) Déterminer le nombre de personnes recrutées la seconde année, la troisième année.

(2) En déduire le nombre de personnes présentes au club la seconde année, la troisième année.

(3) Montrer que $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

(4) En utilisant la calculatrice, donner le nombre de personnes recrutées la 16ème année.

Partie B : Utilisation d'un algorithme

Pour répondre à ce problème, on propose l'algorithme suivant :

```
Variables :
        u, i, S, N
Entree :
        Saisir un nombre N superieur a 1
Initialisation :
        Mettre 3 dans u
        Mettre u dans S
Traitement :
        Pour i allant de 1 a N faire
                u prend la valeur 2 * u +3
                S prend la valeur S+u
                Afficher S
        Fin pour
```

(1) Pour la valeur $N = 4$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant.

Valeur de i	0	1	....	
Valeur de u	3		....	
Valeur de S	3		....	

(2) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 4.

(3) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter les nombres affichés par cet algorithme quand on saisit un nombre N supérieur à 1.

(4) Quelle valeur de N doit on saisir pour répondre à notre problème.

(5) Modifier l'algorithme pour n'afficher que la dernière valeur de S.

Partie C : En utilisant la formule générale de u

Soit v définie pour tout n par $v_n = u_n + 3$.

(1) Montrer que v est une suite géométrique.

(2) En déduire la formule générale de v puis que $u_n = 3 \times 2^{n+1} - 3$.

(3) a. Calculer

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{15}.$$

b. En déduire la valeur de :

$$3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + 3 \times 2^{16};$$

c. puis la réponse au problème posé.