1ère S 12 DST 3 25 novembre 2013

Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (4 points)

Donner le sens de variations des fonctions suivantes sur le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ possible :

(1) $f_1 : x \mapsto |x|$

(2) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} + 2$

(3) $f_3 : x \mapsto \frac{1}{-x^2+2x+3}$

(4) $f_4 : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{-x^2+2x+3}} + 3$

Solution:

(1) La fonction est décroissante sur $]-\infty;0[$ et croissante sur $]0;\infty[$

(2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc la fonction f_2 l'est aussi. On sait que $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, selon le cours il en est de même pour f_2.

(3) Étudions d'abord la fonction $x \mapsto -x^2 + 2x + 3$. Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré. Pour étudier les variations de cette fonction, on calcule la forme canonique de ce polynôme. On a :

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4.$$

De cette forme on en déduit les variations sur $\mathbb{R}$ et la factorisation $(-(x-1)^2 + 4 = -(x-1+2)(x-1-2) = -(x+1)(x-3))$. Les racines du polynômes sont donc -1 et 3, on en déduit alors le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		-1		1		3		∞
$-x^2+2x+3$		↗		↗	4	↘		↘	
f_3		↘	‖	↘	$\frac{1}{4}$	↗	‖	↗	

(4) En reprenant l'étude du polynôme de l'exercice précédent, on montre que $-x^2+2x+3 \geqslant 0$ sur $[-1;3]$, la fonction f_4 n'est donc définie que sur cet intervalle. Comme la fonction racine carrée conserve les variations et que la multiplication par 2 et l'addition par 3 ne change pas le sens de variation, on a :

x	-1		1		3
$\sqrt{-x^2+2x+3}$	0	↗	2	↘	
f_4	‖	↘	4	↗	‖

Exercice 2 : (4 points)

(1) Exprimer en fonction de n la somme suivante :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

(2) Démontrer cette formule.

(3) Soit u une suite définie par $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 5$, utiliser la formule précédente pour calculer :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{25}.$$

Solution:

(1) On a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) Voir le cours.

(3) u est donc une suite arithmétique et on a $u_n = 5 + 3n$. Donc :

$$u_0+u_1+\cdots+u_{25} = 5+3\times0+5+3\times1+\cdots+5+3\times25 = 5\times(25+1)+3(1+2+3+\cdots+25) = 1105.$$

Exercice 3 : (4 points)

(1) Pour chacune des suites suivantes préciser si elles sont arithmétiques, géométriques ou autres :

a. $u_n = 4 + 9n$

b. $v_n = (n+1)^2 - n^2$

c. $w_n = 2^n + 3$

d. $x_n = 5 \times \frac{2^n}{3^{2n+1}}$

(2) Les suites u et v sont arithmétiques. Montrer que la suite w définie par $w_n = u_n - 2v_n$ est arithmétique.

(3) Les suites u et v sont géométriques. On suppose de plus que $v_0 \neq 0$ et que la raison de v est différente de 0 Montrer que la suite w définie par $w_n = \frac{2u_n}{v_n}$ est géométrique.

Solution:

(1) a. On a $u_{n+1} - u_n = 9$, donc la suite est arithmétique.

b. On a $v_{n+1} - v_n = 2$, donc la suite est arithmétique.

c. On a $w_0 = 4$, $w_1 = 5$, $w_2 = 7$, on a donc $\frac{w_2}{w_1} \neq \frac{w_1}{w_0}$ et $w_2 - w_1 \neq w_1 - w_0$, cette suite est donc ni arithmétique, ni géométrique.

d. On a $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n+3}} = \frac{2}{9}$, donc la suite est géométrique.

(2) u et v sont arithmétiques, on a donc r_1 et r_2 tels que : $u_{n+1} = u_n + r_1$ et $v_{n+1} = v_n + r_2$. On a $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - u_n - 2v_{n+1} - 2v_n = u_n + r_1 - u_n - 2v_n - 2r_2 + 2v_n = r_1 - 2r_2$, donc la suite w est une suite arithmétique de raison 2.

(3) u et v sont géométriques, on a donc $u_{n+1} = q_1 u_n$ et $v_{n+1} = q_2 v_n$.
On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2u_{n+1}}{2u_n} \times \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{2u_n \times q_1}{2u_n} \times \frac{v_n}{v_n \times q_2} = 2\frac{q_1}{q_2}$

Exercice 4 : (8 points)

Trois amis décident de créer un club sélectif. Une règle précise est adoptée pour adhérer à ce club. Chaque membre recruté à l'année n doit parrainer à l'année $n+1$ deux nouvelles personnes qui intégreront le club et trois personnes seront acceptées sur dossier sans être parrainées.

Une personne qui a adhéré au club est membre pour toujours (elle ne sera jamais effacée des listes).

Le but de cet exercice est de calculer, en utilisant plusieurs méthodes, le nombre de personnes inscrites dans ce club la 16-ème année.

Partie A : Modélisation de la suite

On appelle u_n le nombre de nouvelles personnes inscrites dans ce club la $n+1$-ème année. Pour la première année, on a $u_0 = 3$.

(1) Déterminer le nombre de personnes recrutées la seconde année, la troisième année.

(2) En déduire le nombre de personnes présentes au club la seconde année, la troisième année.

(3) Montrer que $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

(4) En utilisant la calculatrice, donner le nombre de personnes recrutées la 16ème année.

Solution:

(1) La seconde année, les 3 inscrits à l'origine parraineront 2 personnes chacun, il y aura donc 6 personnes recrutées de cette façon et on rajoute après les 3 personnes supplémentaires ce qui fait 9 personnes.

De la même façon, on montre que la troisième année il y a $9 \times 2 + 3 = 21$.

(2) La Seconde année, il y a les 9 nouveaux plus les 3 anciens, c'est-à-dire 12 personnes.

La Troisième année, il y a les 12 personnes présentes plus les 21 nouvelles, donc 33 personnes.

(3) L'année $n+2$, les inscrits de l'année $n+1$ (il y en a u_n) désignent deux personnes (il y en a donc $2u_n$) et 3 personnes sont ajoutés. Il y a donc $2u_n + 3$ nouveaux inscrits.

(4) Avec la calculatrice, on a $u_{15} = 196605$. Il y a donc 196605 personnes recrutés la 16ème année.

Partie B : Utilisation d'un algorithme

Pour répondre à ce problème, on propose l'algorithme suivant :

```
Variables :
        u, i, S, N
Entree :
        Saisir un nombre N superieur a 1
Initialisation :
        Mettre 3 dans u
        Mettre u dans S
Traitement :
        Pour i allant de 1 a N faire
                u prend la valeur 2 * u +3
                S prend la valeur S+u
                Afficher S
        Fin pour
```

(1) Pour la valeur $N = 4$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant.

Valeur de i	0	1	....	
Valeur de u	3		....	
Valeur de S	3		....	

(2) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 4.

(3) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter les nombres affichés par cet algorithme quand on saisit un nombre N supérieur à 1.

(4) Quelle valeur de N doit on saisir pour répondre à notre problème.

(5) Modifier l'algorithme pour n'afficher que la dernière valeur de S.

Solution:

(1)

Valeur de i	0	1	2	3	4	
Valeur de u	3	9	21	45	93	
Valeur de S	3	12	33	78	171	

(2) L'affichage est constitué des nombres successifs : 12, 33, 78, 171.

(3) Cet algorithme nous renvoie le nombres d'inscrits à l'année $N + 1$.

(4) On échange **Fin pour** et **Afficher S**.

Partie C : En utilisant la formule générale de u

Soit v définie pour tout n par $v_n = u_n + 3$.

(1) Montrer que v est une suite géométrique.

(2) En déduire la formule générale de v puis que $u_n = 3 \times 2^{n+1} - 3$.

(3) a. Calculer

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{15}.$$

b. En déduire la valeur de :

$$3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + 3 \times 2^{16};$$

c. puis la réponse au problème posé.

Solution:

(1) On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3} = \frac{2u_n + 6}{u_n + 3} = 2.$$

Donc la suite est géométrique de raison 2.

(2) On a $v_0 = u_0 + 3 = 6$

On a donc $v_n = 6 \times 2^n$ et donc $u_n = 6 \times 2^n - 3 = 3 \times 2^{n+1} - 3$.

(3) a. On a :

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{15} = 2^{16} - 1 = 65535$$

b. On a :

$$3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + 3 \times 2^{16} = 6 \times (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{15}) = 6 \times 65535 = 393210$$

c. On finit par :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 \times 2^1 - 3 + 3 \times 2^2 - 3 + \cdots + 3 \times 2^{16} - 3 = 393210 - 3 \times 16 = 393165.$$

Il y a donc 393165 dans ce club la 15ème année.