Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (4 points)

Restitution organisée des connaissances.

Le nombre de repas servis par un restaurant scolaire un jour donné est une variable aléatoire X d'espérance mathématique 500. Le coût d'un repas est 2€ et les coûts fixes journaliers sont de 1000€.

Soit Y la variable aléatoire égale à la dépense totale journalière pour le restaurant.

(1) Montrer que $Y = 2X + 1000$
(2) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X)$.
(3) Démontrer cette relation.
(4) En déduire $E(Y)$.

Exercice 2 : (5 points)

Romain propose le jeu suivant à Mael : un sac contient n boules noires et 1 boule blanche (avec n entier naturel supérieur ou égal à 1). Mael tire une boule au hasard, note sa couleur, la remet dans le sac, puis tire une nouvelle boule.

Si les deux boules tirées sont noires, Romain verse 1€ à Mael.
Si les deux boules tirées sont blanches, Romain verse 10€ à Mael.
Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, Mael doit donner 3,5€ à Romain.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Mael (il est compté négativement si c'est une perte).

(1) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
(2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
(3) Exprimer, en fonction de n, l'espérance de X.
(4) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?
(5) Pour quelles valeurs de n le jeu risque-t-il de rapporter plus d'argent à Romain ?

Exercice 3 : (5 points)

Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère les points $A(0; 1)$ et $M(x; y)$. M est un point de la droite d d'équation $y = x - 4$.

L'objectif est d'étudier les variations de la distance AM lorsque M parcourt la droite d, et en particulier de déterminer la distance AM minimale.

(1) a. Exprimer la distance AM en fonction des coordonnées de x et y de M.
    b. Justifier ensuite que $AM = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.
(2) L'objectif est donc maintenant d'étudier les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 10x + 25}.$$

    a. Justifier que $f(x)$ existe pour tout x réel.
    b. Établir le tableau de variations de la fonction f.
(3) En déduire la valeur minimale de AM.

Exercice 4 : (4 points)

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n - 5n + 1}{2}$.
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^n + 5n - 1}{2}$.

(1) Soit (a_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$
    a. Montrer que la suite (a_n) est géométrique.
    b. Calculer la somme $A_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} a_k$.
(2) Soit (b_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n - v_n$.
    a. Montrer que la suite (b_n) est arithmétique.
    b. Calculer la somme $B_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} b_k$.
(3) En déduire la somme $S_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k$, puis la somme $T_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} v_k$

Exercice 5 : (2 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique et (v_n), la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{u_n}$. Démontre que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.