Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (4 points)

Restitution organisée des connaissances.

Le nombre de repas servis par un restaurant scolaire un jour donné est une variable aléatoire X d'espérance mathématique 500. Le coût d'un repas est 2€ et les coûts fixes journaliers sont de 1000€.

Soit Y la variable aléatoire égale à la dépense totale journalière pour le restaurant.

(1) Montrer que $Y = 2X + 1000$

(2) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X)$.

(3) Démontrer cette relation.

(4) En déduire $E(Y)$.

Solution:

(1) La multiplication par 2 est donné par le cout d'un repas. On ajoute à ça le coût fixe journalier pour obtenir $Y = 2X + 1000$.

(2) On a $E(Y) = 2E(X) + 1000$.

(3) Voir le cours avec $a = 2$ et $b = 1000$.

(4) On e dédit que $E(Y) = 2000$.

Exercice 2 : (5 points)

Romain propose le jeu suivant à Mael : un sac contient n boules noires et 1 boule blanche (avec n entier naturel supérieur ou égal à 1). Mael tire une boule au hasard, note sa couleur, la remet dans le sac, puis tire une nouvelle boule.

Si les deux boules tirées sont noires, Romain verse 1€ à Mael.

Si les deux boules tirées sont blanches, Romain verse 10€ à Mael.

Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, Mael doit donner 3,5€ à Romain.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Mael (il est compté négativement si c'est une perte).

(1) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

(2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

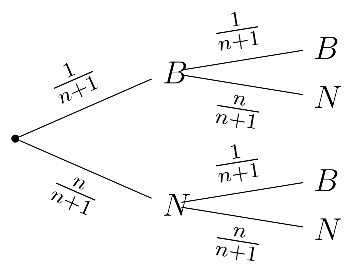
(3) Exprimer, en fonction de n, l'espérance de X.

(4) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?

(5) Pour quelles valeurs de n le jeu risque-t-il de rapporter plus d'argent à Romain ?

Solution:

(1) L'arbre de probabilité est le suivant :



(2) Les valeurs prisent par X sont dans $\{1; 3{,}5; 10\}$ La loi de probabilité suivie par X est définie par :

x_i	1	$-3{,}5$	10
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$	$\dfrac{2n}{(n+1)^2}$	$\dfrac{1}{(n+1)^2}$

(3) On a $E(X) = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} - \dfrac{7n}{(n+1)^2} + \dfrac{10}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2 - 7n + 10}{(n+1)^2}$.

(4) Le jeu est équitable si $E(X) = 0$, Le dénominateur ne s'annulant jamais, il suffit de regarder quand le numérateur est nul.
On reconnaît un trinôme du second degré. On a $\Delta = 9 = 3^2$ et donc les solutions de $x^2 - 7x + 10 = 0$ sont $\dfrac{7-3}{2} = 2$ et $\dfrac{7+3}{2} = 5$.
Les valeurs de n pour que le jeu soit équitable sont donc 2 et 4.

Exercice 3 : (5 points)

Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère les points $A(0; 1)$ et $M(x; y)$. M est un point de la droite d d'équation $y = x - 4$.
L'objectif est d'étudier les variations de la distance AM lorsque M parcourt la droite d, et en particulier de déterminer la distance AM minimale.

(1) a. Exprimer la distance AM en fonction des coordonnées de x et y de M.
b. Justifier ensuite que $AM = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.

(2) L'objectif est donc maintenant d'étudier les variations de la fonction :
$$f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 10x + 25}.$$
a. Justifier que $f(x)$ existe pour tout x réel.
b. Établir le tableau de variations de la fonction f.

(3) En déduire la valeur minimale de AM.

Solution:

(1) a. On a $AM = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$
b. Donc $AM = \sqrt{x^2 + (x-4-1)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 - 10x + 25} = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.

(2) a. On étudie le signe de $2x^2 - 10x + 25$ en fonction de x. $\Delta = 100 - 200 = -100 < 0$ et le coefficient de tête est positif, donc le trinôme est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc bien définie.
b. On calcule d'abord la forme canonique du trinôme, on a :
$$2x^2 - 10x + 25 = 2(x - \frac{5}{2}) + \frac{25}{2}.$$
On en déduit les variations du trinôme puis les variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$Trinome$		$\searrow$	$\frac{25}{2}$	$\nearrow$	
f		$\searrow$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	

(3) La valeur minimale de AM est donc $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4 : (4 points)

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n-5n+1}{2}$.

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^n+5n-1}{2}$.

(1) Soit (a_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$

a. Montrer que la suite (a_n) est géométrique.

b. Calculer la somme $A_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} a_k$.

(2) Soit (b_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n - v_n$.

a. Montrer que la suite (b_n) est arithmétique.

b. Calculer la somme $B_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} b_k$.

(3) En déduire la somme $S_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k$, puis la somme $T_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} v_k$

Solution:

(1) a. On a $a_n = \frac{3^n-5n+1}{2} + \frac{3^n+5n-1}{2} = 3^n$.

Donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ et a est une suite géométrique de raison 3.

b. Le cours nous dit que $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} = \dfrac{3^{11}-1}{2} = 88573$. On a donc $A_{10} = 88573$.

(2) a. On a $b_n = \frac{3^n-5n+1}{2} - \frac{3^n+5n-1}{2} = -5n + 1$ et donc $b_{n+1} - b_n = -5$. b est donc une suite géométrique de raison -5.

b. On sait que $1 + \cdots + 10 = \dfrac{10(10+1)}{2} = 55$ et donc :

$$1 + (-5+1) + (-5 \times 2 + 1) + \cdots + (-5 \times 10 + 1) = -5 \times 55 + 11 = -264.$$

(3) On a $u_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, donc $S_{10} = \dfrac{88573 - 264}{2} = \dfrac{88309}{2}$.

De même, on a $v_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, donc $T_{10} = \dfrac{88573 + 264}{2} = \dfrac{88837}{2}$.

Exercice 5 : (2 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique et (v_n), la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{u_n}$. Démontre que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.

Solution:

(1) Si u est une suite arithmétique, il existe r tel que $u_{n+1} = u_n + r$, on a donc $v_{n+1} = 3^{u_n+r} = 3^{u_n} \times 3^r = v_n \times 3^r$. Donc v est une suite géométrique de raison 3^r.