Exercice 1 : (3 points)

(1) f est une fonction polynôme, on a donc $f'(x) = \frac{6x^2+5}{2}$

(2) On pose $u(x) = x + 3$, on a $u'(x) = 1$ et $g'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$

(3) On pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x$, on a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$ et donc $h'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Exercice 2 : (4 points)

(1) f est définie pour $x \neq 3$, on a donc :

$$E_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

(2) Afin de déterminer les variations de f, on dérive cette fonction.
On pose $u(x) = -x^2 + x - 4$ et $v(x) = x - 3$, on a $u'(x) = -2x + 1$ et $v' = 1$. Donc :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-3) - (-x^2+x-4)}{(x-3)^2} = \frac{-x^2+6x+1}{(x-3)^2},$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui du polynôme $-x^2+6x+1$. Le discriminant Δ de ce polynôme est 40. Les racines sont donc $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{40}}{-2} = 3 + \sqrt{10}$ et $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{10}}{-2} = 3 - \sqrt{10}$.
On remarque que $3 + \sqrt{10} \approx 6{,}17 > 5$ et $3 - \sqrt{10} \approx -0{,}16$, on a donc :

x	-5		$3-\sqrt{10}$		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$2\sqrt{10}-5$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-12

(3) En utilisant la formule du cours, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 : (6 points)

(1) Vrai, car $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$.

(2) Faux, on a :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) Faux, les angles $(\vec{u},\vec{v})$ et $(2\vec{u}, 3\vec{v})$ ont mêmes mesures, mais avec $-3\vec{v}$, les angles ont des mesures opposées.

(4) Vrai :

$$(\vec{u}, \vec{t}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{t}) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{21\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

(5) Faux $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(6) Faux, $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(7) Faux, Il y a une solution à la première équation et deux à la seconde.

(8) Vrai, les solutions sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{-3\pi}{4}$.

(9) Vrai, on sait que $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, comme cos est exprimé au carré, le changement de signes ne modifie pas l'équation.

Exercice 4 : (4 points)

(1) a. On remarque que $\frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}$, on a donc :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

b. On en déduit que :

$$\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Dans $]-\pi;\pi]$, on a :

$$S = \left\{\frac{3\pi}{5}; -\frac{3\pi}{5}\right\}.$$

(2) On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout x réel.
Comme $\frac{\pi}{10}$ est dans $]0;\pi[$, on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$.
On en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1 - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 5 : (3 points)

On voit que le coefficient directeur de la tangente à f en 5 est 1, seule la courbe 2 passe par le point $(5;1)$. La solution est la 2ème courbe.