Durée 2 heure. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (2 points)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \frac{9}{2x^2+5x^3-3}$ (2) $g(x) = \frac{\sqrt{x}+3}{5}$ (3) $h(x) = \sqrt{x} \times \left(\frac{1}{x}+2\right)$

Exercice 2 : (3 points)

On se donne la fonction f définie sur un ensemble E_f de $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+3x+5}{2x+8}.$$

(1) Donner le plus grand ensemble de définition E_f possible.

On admettra par la suite que la fonction f est dérivable sur cet ensemble.

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur E_f.

(3) Déterminer l'équation de la tangente de f en 0.

Exercice 3 : (3 points)

Soit d la droite passant par les points $A(-5;8)$ et $B(5;-7)$ et d' la droite passant par l'origine du repère et dirigée par le vecteur $\vec{v}(-2;3)$.

(1) a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

b. En déduire la position relative des droites d et d'.

(2) Donner une équation cartésienne de d et de d'.

(3) a. Justifier que la droite d_1 dont l'ordonnée à l'origine est 1 et de vecteur directeur $(4;-7)$ est sécante avec les droites d et d'.

b. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d'.

Exercice 4 : (4 points)

Des statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition, la probabilité pour un sportif pris au hasard d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,2. On décide de construire un test qui, à la suite des contrôles sur une échantillon de 50 sportifs, prélevé au hasard, permette de décider si, au seuil de risque de 5%, la probabilité de sportifs contrôlés positifs est $p = 0{,}2$.

(1) Soit X, la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire (supposé non exhaustif) de 50 sportifs contrôlés, associe le nombre de sportifs contrôlés positivement.

a. Quelle loi suit X ?

b. Quelle est l'espérance et l'écart-type de cette loi ?

c. Déterminer $P(X = 10)$.

d. Déterminer $P(X \geqslant 2)$.

(2) Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse $p = 0{,}2$ à partir des résultats obtenus sur l'échantillon.

(3) Dans cet échantillon, onze contrôles antidopage ont été déclarés positifs. Que peut-on en conclure sur l'hypothèse faite ?

Exercice 5 : (5 points)

Les parents de Paul, lui ouvrent un livret jeune le 1er avril 2014 en y déposant 115 euros.

Chaque mois Paul reçoit 80 euros sur ce compte (entre la somme versée par ses parents et les intérêts acquis).

Paul de son côté dépense 5% de ce compte chaque mois.

On s'intéresse au solde du compte les 1er jours des mois suivants.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du solde du compte le mois n (le mois d'avril 2014 étant le mois 0).

Pour simplifier la modélisation, on ignorera les intérêts

On arrondira tous les résultats au centième

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Le banquier détermine le solde le premier jour du mois n à l'aide d'un algorithme.
   (a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul un algorithme permet d'estimer le solde. Déterminer, en justifiant (on procédera par élimination), quel est cet algorithme.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
U est un nombre réel	U est un nombre réel	U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers
Début	**Début**	**Début**
Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire	Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire	| Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire
| Affecter $0{,}05 \times U + 80$ à U	| Affecter $0{,}95 \times U + 80$ à U	| Affecter $0{,}95 \times U + 80$ à U
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour
Afficher U	Afficher U	Afficher U
Fin	Fin	Fin

   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1600$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 1600 - 1485 \times 0{,}95^n$.
4. Le compte est plafonné à 1600 euros. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
5. Quelle somme dépensera Paul du 1er avril 2014 au 31er mars 2024 ?

Exercice 6 : (3 points)

(1) Soit l'arbre pondéré associé à la répétition de n expériences identiques d'un schéma de Bernoulli.
   a. Quel est le nombre de chemins distincts de cet arbre ?
   b. En déduire la somme suivante en fonction de n :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

(2) On considère à présent l'arbre pondéré associé à la répétition de $2n$ expériences identiques d'un schéma de Bernoulli.
   a. Quel est le nombre de chemins avec n succès de cet arbre ?
   b. Que représente chacun des produits :

$$\binom{n}{0} \times \binom{n}{n};\ \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1};\ \cdots;\ \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}.$$

   avec k compris entre 0 et n ?

   c. En déduire la somme suivante en fonction de n :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$