Exercice 1 : (2 points)

(1) On pose $u(x) = 2x^2 + 5x^3 - 3$, on a $u'(x) = 4x + 15x^2$ et :

$$f'(x) = -9\frac{4x + 15x^2}{(2x^2 + 5x^3 - 3)^2}.$$

(2) On a $g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{5} = \frac{1}{10\sqrt{x}}$.

(3) On pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{1}{x} + 2$, on a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc :

$$h'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \times \left(\frac{1}{x} + 2\right) - \frac{1}{x^2} \times \sqrt{x} = \frac{-1 + 2x}{2x\sqrt{x}}.$$

Exercice 2 : (3 points)

(1) f n'est pas définie lorsque $x = -4$, le plus grand domaine de définition est donc :

$$]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[.$$

(2) f est dérivable sur E_f, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 5$ et $v(x) = 2x + 8$, on a $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 2$. On a :

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(2x + 8) - 2(x^2 + 3x + 5)}{(2x + 8)^2} = \frac{2x^2 + 16x + 14}{(2x + 8)^2}.$$

Étudions le signe de $f'(x)$. Ceci est équivalent à étudier le signe de $2x^2 + 16x + 14$.
Le discriminant Δ vaut 144, il y a donc deux racines à ce polynôme, -1 et -7.
Comme le coefficient dominant est positif, on a :

x	$-\infty$		-7		-4		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$-\frac{11}{2}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

(3) $f(0) = \frac{5}{8}$ et $f'(x) = \frac{7}{32}$, donc une équation de la tangente en 0 est : $y = \frac{7}{32}x + \frac{5}{8}$.

Exercice 3 : (3 points)

(1) a. Un vecteur directeur de la droite d est $\binom{10}{-15}$.

b. $10 \times 3 - (-15) \times (-2) = 0$ donc les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires. On en déduit que d et d' sont parallèles.

(2) Des équations de d et d' sont du type $3x + 2y + c = 0$. d passe par A donc $3 \times -5 + 2 \times 8 + c = 0$ et $c = -1$. Une équation de d est $3x + 2y - 1 = 0$.
d' passe par l'origine donc une équation de d' est $3x + 2y = 0$

(3) a. Les vecteurs directeur de d_1 ne sont pas colinéaires avec ceux de d et d' ($-2 \times -7 - 3 \times 4 = 2 \neq 0$). d_1 n'est donc pas parallèle à ce droites. Elle est donc sécante.

b. Dans un premier temps, on détermine l'équation de la droite d_1. Une équation est $7x+4y-4 = 0$.
On résout ensuite, par combinaisons, le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 0 \\ 7x + 4y - 4 = 0 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y &= 0 \\ x - 4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= (-3 \times 4)/2 = -6 \\ x &= 4 \end{cases}$$

Le point d'intersection a donc comme coordonnées $(1; -1)$.

Exercice 4 : (4 points)

(1) a. Contrôler un sportif au hasard est assimilé à une épreuve de Bernoulli de succès ≪ le sportif est positif ≫ de probabilité 0,2.

On prélève 50 sportifs de façon identiques et indépendantes. On a donc la répétition de 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X est la variable comptant le le nombre de sportifs contrôlés positivement.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et 0,2.

b. Selon le cours, on sait que l'espérance est de 10 et l'écart-type de $2\sqrt{2}$.

c. $P(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0{,}2^{10} \times 0{,}8^{40} \approx 0{,}13$

d. $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X - 1) \approx 1$.

(2) Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est 5. **à vérifier**

Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est 16.

L'intervalle de fluctuation à 5% est donc $[\frac{3}{50}; \frac{6}{25}]$.

Si la fréquence f de dopé n'est pas compris dans l'intervalle $[\frac{5}{50}; \frac{8}{25}]$, on rejette l'hypothèse au seuil de risque de 5% que la probabilité de dopé est 0,2.

Sinon on ne rejette pas l'hypothèse au seuil de risque de 5%.

(3) Si 11 contrôle antidopage ont été déclarés positifs, la fréquence est de $\frac{11}{50}$ qui appartient à l'intervalle, on ne rejette donc pas l'hypothèse au seuil de risque de 5%.

Exercice 5 : (5 points) 1.

Le mois 1, il aura $115 \times 0{,}95 + 80 = 189{,}25$€, donc $u_1 = 189{,}25$€. De la même manière, on montre que $u_2 = 259,7875$ €

2. Le banquier détermine le solde le premier jour du mois n à l'aide d'un algorithme.

(a) Ça ne peut-être le premier algorithme car il y a une multiplication par 0,05. Or il dépense 5%, il lui reste donc à la fin 95% de son solde sur son compte.

Ça ne peut être le second algorithme car à chaque itération de la boucle, on affecte 115 à U. On calcul donc à chaque fois u_1.

Par élimination, on en déduit que le bon algorithme est le troisième.

(b) Dépenser 5% revient à multiplier le solde par 95%. Les parents donnants 80 euros par mois, on a :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 80.$$

3. (a) On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1600 = 0{,}95u_n + 80 - 1600 = 0{,}95\,(v_n + 1600) - 1520 = 0{,}95v_n.$$

La suite v est donc géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1600 = -1485$.

(b) On alors $v_n = -1485 \times 0{,}95^n$

(c) Pour tout n, on a alors $u_n = v_n + 1600 = -1485 \times 0{,}95^n + 1600$.

4. Pour tout entier n, on a $0{,}95^n > 0$ (Le produit de deux nombres positifs est positifs), donc $-1485 \times 0{,}95^n < 0$. On en déduit que $u_n = -1485 \times 0{,}95^n + 1600 < 1600$. Le solde n'atteindra donc jamais son plafond.

5. Le solde du 1er mars 2024 correspond à u_{119} : Il dépensera donc :

$$\sum_{i=0}^{119} 0{,}05 \times u_i = 0{,}05 \sum_{i=0}^{119} (-1485 \times 0{,}95^n + 1600) = 0{,}05 \left(-1485 \sum_{i=0}^{119} 0{,}95^n + \sum_{i=0}^{119} 1600 \right)$$
$$= 0{,}05 \left(-1485 \left(\frac{1 - 0{,}95^{120}}{1 - 0{,}95} \right) + 1600 \times 120 \right) \approx 8118.$$

Il aura donc dépensé 8118€pendant ces 12 années.

Exercice 6 : (3 points)

(1) a. À chaque étape, il y a deux fois plus de chemins. Si la longueur de l'arbre est n, il y aura 2^n chemins.

b. $\binom{n}{k}$ représente le nombre de chemins avec k succès, la somme demandé représente donc la somme de tous les chemins de l'arbre, on a :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(2) a. Par définition des coefficients binomiaux, on a $\binom{2n}{n}$ chemins.

b. Le produit $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ représente le nombre de chemins avec k succès lors des n premières épreuves et $n-k$ succès dans les n suivantes. Chaque chemin aura donc n succès.

c. Comme pour tout entier k, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on en déduit que :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \text{nombre de chemins avec } n \text{ succès et } 2n \text{ épreuves} = \binom{2n}{n}.$$