Durée 1 heure. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x-5}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère du plan.

(1) Déterminer l'ensemble de définition, $\mathscr{D}_f$, de la fonction f.

(2) Étudier les variations de f sur l'ensemble $\mathscr{D}_f$.

(3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

(4) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 2 : (5 points)

Soient a et b deux réels.

(1) Rappeler les 4 formules d'additions du cosinus et du sinus.

(2) Démontrer la formule donnant $\cos(a-b)$

(3) Comment peut-on en déduire de $\cos(a-b)$ la formule donnant $\sin(a-b)$?

Exercice 3 : (2 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2;-1)$, $B(4;1)$ et $C(1;5)$

(1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(2) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en radians.

Exercice 4 : (4 points)

On donne les points $A(-1;2)$ et $B(3;4)$, M est un point de coordonnées $(x;y)$.

(1) Calculer, en fonction de x et de y, $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MA}$.

(2) Prouver que les points M tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ sont situés sur un cercle dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre.

Exercice 5 : (4 points)

Cette question est plus difficile, des figures sont indispensables pour comprendre le problème.

Soient M un point, $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et (d) une droite passant par M et coupant le cercle en A et B. Alors le produit $MA \times MB$ est indépendant de la droite orientée choisie et vaut $MO^2 - R^2$ si M est à l'extérieur du cercle et $R^2 - MO^2$ sinon.

On l'appelle puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

L'objectif de cette question est de répondre à ce problème.

(1) Soit A' le symétrique de A par rapport a O. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}.$$

(2) Le théorème de la médiane s'énonce ainsi :
ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$. On a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
Démontrer ce théorème.

(3) Déduire des questions précédentes que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2.$$

(4) Conclure.