Exercice 1 : (5 points)

(1) $2x-5=0$ est équivalent à $x=\frac{5}{2}$. $f$ est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{2}\}$.

(2) $f$ est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}_f$ avec un dénominateur ne s'annullant pas sur cet ensemble. On pose $u(x)=x^2-4$ et $v(x)=2x-5$, on a $u'(x)=2x$ et $v'(x)=2$. Donc

$$f'(x)=\frac{2x(2x-5)-2(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\frac{4x^2-10x-2x^2+8}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^2-10x+8}{(x^2-4)^2}.$$

Le discriminant du numérateur est 64 et les racines sont donc 1 et 4. Le coefficient dominant de ce trinome étant positif, on en déduit que $f'$ est positive sur $]-\infty;1]\cap[4;+\infty[$ et négative ailleurs.

$f$ est donc croissante sur $]-\infty;1]$, décroissante sur $[1;\frac{5}{2}[$, décroissante sur $]\frac{5}{2};4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$. j

(3) L'équation réduite est :

$$y=f^(3)(x-3)+f(3)=-4x+17.$$

(4) Le coefficient directeur de cette droite est $-1$. On cherche donc à calculer les abscisses $x$ tels que $f'(x)=-1$. Comme 4 est une racine du numérateur, on peut

$$\frac{2x^2-10x+8}{(2x-5)^2}=-1\Leftrightarrow 2x^2-10x+8+(2x-5)^2=0\Leftrightarrow 2x^2-10x+8+4x^2-20x+25=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+33=0.$$

On trouve alors 2 abscisses $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2 : (5 points)

Tout est dans le cours

Exercice 3 : (2 points)

(1) $\overrightarrow{AB}=\binom{6}{2}$ et $\overrightarrow{AC}=\binom{3}{6}$.

On a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18+12=30$.

(2) On a de plus $AB=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$ et $AC=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$.

On a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

$\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{30}{\sqrt{45}\times\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{-\pi}{4}$.

Par la configuration des points, on a :

$$\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4 : (4 points)

(1) $\overrightarrow{MA}=\binom{-1-x}{2-y}$ et $\overrightarrow{MB}=\binom{3-x}{4-y}$, on a donc :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MA}=(2-2x)(-1-x)+(6-2y)(2-y)=-2-2x+2x+2x^2+12-6y-4y+2y^2=2x^2+2y^2-10y+10.$$

(2) On peut encore réécrire l'expression précédente comme :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MA}=2x^2+2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}.$$

On en déduit qu'il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(0;\frac{5}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5 : (4 points)

(1)

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}\right)=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{A'B}.$$

$A'$ est le symétrique de $A$ par rapport à $O$, donc $[AA']$ est un diamètre du cercle, donc les droites $(AB)$ et $(A'B)$ sont perpendiculaires.

$M\in(AB)$ donc $\overrightarrow{MB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$

(2) Voir le cours.

(3) On se place dans le triangle $MAA'$. $O$ est le milieu de $[AA']$ donc selon le théorème de la médiane : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AA'^2$.

Comme $AA'=2R$, on en conclut sur le résultat souhaité.

(4) Si $M$ est à l'extérieur du cercle, alors les points sont alignés dans l'ordre $MAB$ ou $MBA$, dans tous les cas, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=A\times B$, ce qui explique le résultat.

Si $M$ est à l'intérieur du cercle, alors les points sont alignés dans l'ordre $ABM$ donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-A\times B$, ce qui explique le résultat.