Seconde 14 Correction du DST10 3 juin 2014

Exercice 1 : (6 points)

(1) Le 2 janvier 2014, le nombre d'habitants sera de $2400 \times 0{,}8 + 400 = 2320$. Le 2 janvier 2015, le nombre d'habitants sera de $2320 \times 0{,}8 + 400 \approx 2256$.

(2)
```
Afficher "Entrer le nombre d'inscrits"
Saisir(A)
Si A<2050
    alors
    Afficher "On ferme la mediatheque"
Sinon
    Afficher "On ne ferme pas la mediatheque"
Fin si
```

(3) a. L'algorithme permet de calculer le nombre d'années jusqu'à ce que le nombre d'inscrits soit inférieur à 2050.

b. Avec la calculatrice on obtient 10. Il faut donc 10 ans avant que la médiathèque ferme.

(4) On utilise cet algorithme pour calculer la somme :

```
A = 2400
S = A
Pour i allant de 1 a 10 faire
    A = A * 0,8 + 400
    S = S + A
Fin pour
Afficher S * 5
```

En executant cet algorithme, on obtient environ 119141 euros.

Exercice 2 : (4 points)

(1) f est définie sur $]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$.

(2) $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

(3) $3 + \dfrac{14}{x-4} = \dfrac{3x - 12 + 14}{x-4} = \dfrac{3x+2}{x-4}$

(4) Les axes à tracer pour la représentation graphique de f sont les droites d'équation $y = 3$ et $x = 4$. On sait que la fonction est décroissante car $x \mapsto \dfrac{14}{x-4}$ l'est et donc $x \mapsto 3 + \dfrac{14}{x-4}$ l'est aussi. Le tableau de variations est :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

(5) $f(x) = -1 \Longleftrightarrow \dfrac{14}{x-4} = -4 \Leftrightarrow 14 = -4x + 16 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. La solution est donc $\frac{1}{2}$.

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{14}{x-4} = 0$. Cette équation n'a donc pas de solution.

(6) $f(x) > 2 \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x-4} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+2-2x+8}{x-4} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+10}{x-4} > 0$. Avec un tableau de signes, on a : $S =]-\infty; -10[\cup]4; +\infty[$

Exercice 3 : (10 points)

Partie A : Recherche de point(s) M tel(s) que l'aire de $AMNP$ et celle de CDN soient égales

(1) L'aire d'un carré est coté fois coté donc $f(5) = 5 \times 5 = 25$. L'aire d'un rectangle est base fois hauteur divisé par deux donc $g(5) = (20 \times (20-5))/2 = 150$.

(2) De la même façon, si x est la longueur d'un coté, on a $f(x) = x^2$ et $g(x) = -10x + 200$.

(3) a. Il faut penser à respecter les échelles.

b. On cherche donc l'intersection des deux courbes. On trouve que ces courbes se coupent en $x \approx 10$

(4) a. $(x+5)^2 - 15^2 = x^2 + 10x + 25 - 225 = x^2 + 10x - 200$.

b. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x^2 + 10x - 200 = (x+5)^2 - 15^2 = 0$.

c. $(x+5)^2 - 15^2 = (x+5-15)(x+5+15) = (x-10)(x+20)$ donc $S = \{10; -20\}$. La longueur d'un coté est forcément positive, donc la solution acceptable est $x = 10$.

Partie B : Étude de la somme des deux aires

On a $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 10x - 200$

(1) a. Avec la calculatrice, on trouve à peu près $[0\ ;\ 11]$.

b. On a $(x-11)(x+1) = x^2 - 10x - 11 = h(x) - 211$ donc $h(x) \leqslant 211 \Leftrightarrow (x-11)(x+1) \leqslant 0$. Grâce à un tableau de signe, on trouve $S = [-1\ ;\ 11]$, on en déduit que l'intervalle est $[0\ ;\ 11]$ car $x \leqslant 0$.

(2) a. On remarque sur la calculatrice que le minimum est atteint en 5 et vaut 175.

b. Si la conjecture est vrai alors on a : $h(x) = (x-5)^5 + 175$. On a $(x-5)^2 + 175 = x^2 - 10x + 25 + 175 = x^2 - 10x + 200$.