Durée 1 heure.
Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (2 points)

Résoudre les équations suivantes

(1) $(x+2)(x-3)=0$ (2) $x^2-x=0$

Exercice 2 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
Soient trois points $A(4;2)$, $B(1;1)$ et $C(5;-1)$.

(1) a. Calculer les distances BC, AC et AB.
  b. En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

(2) Soit D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
  a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  b. En déduire les coordonnées du point D.

(3) Que peut-on dire du parallélogramme $ABDC$?

(4) Donner les coordonnées du centre du parallélogramme Ω.

Solution:

(1) a. Par la formule du cours, on a $BC=2\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{10}$ et $AB=\sqrt{10}$.
  b. On voit que $AB=AC$, donc le triangle est isocèle en A.
  De plus, on a $AC^2+AB^2=BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

(2) a. $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-1}$
  b. On pose x_D et y_D tels que $D(x_D;y_D)$.
  On a $\overrightarrow{CD}=\binom{x_D-5}{y_D+1}$ et comme $ABDC$ est un parallélogramme, on a aussi $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}=\binom{-3}{-1}$.
  Donc $x_D=-3+5=2$ et $y_D=-1-1=-2$ et $D(2;-2)$.

(3) $ABDC$ est un parallélogramme contenant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueurs, il s'agit donc à la fois d'un rectangle et d'un losange c'est-à-dire un carré.

(4) Le centre du parallélogramme est le milieu de $[BC]$. On a donc $x_\Omega=\frac{1+5}{2}=3$ et $y_\Omega=\frac{1-1}{2}=0$.

Exercice 3 : (4 points)

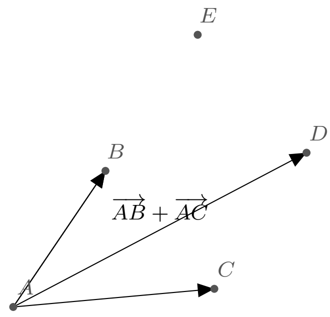
Soient trois points A, B, C distincts.

(1) Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$.

(2) Que peut-on dire du quadrilatère $ABDC$?

(3) Déterminer en justifiant si $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}$

Solution:

(1) 

(2) Voir dessin.

(3) On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$. Le quadrilatère $ABDC$ est bien un parallélogramme.

(4) $ABDC$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Comme A, B, C ne sont pas confondus, l'égalité précédente implique que $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DB}$.
Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, l'égalité $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ est vraie.

(5) Voir dessin.

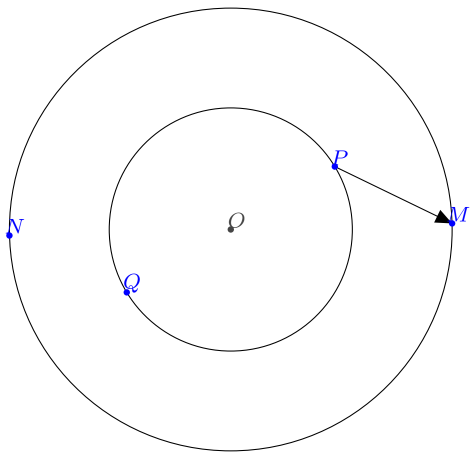
Exercice 4 : (5 points)

Soient C et C' deux cercles de centre O, $[MN]$ est un diamètre de C' et P un point de C.

(1) Construire le point Q tel que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NQ}$.

(2) Démontrer que Q est un point du cercle C.

Solution:



(1)

(2) Par construction, on sait que $PMQN$ est un parallélogramme.
O est le milieu de $[MN]$ car $[MN]$ est le diamètre de C'.
Donc O est aussi le milieu de $[QP]$. On en déduit que $[QP]$ est le diamètre d'un cercle de centre O et comme P appartient à C, on en conclut que $[QP]$ est un diamètre de C et donc Q appartient à C.

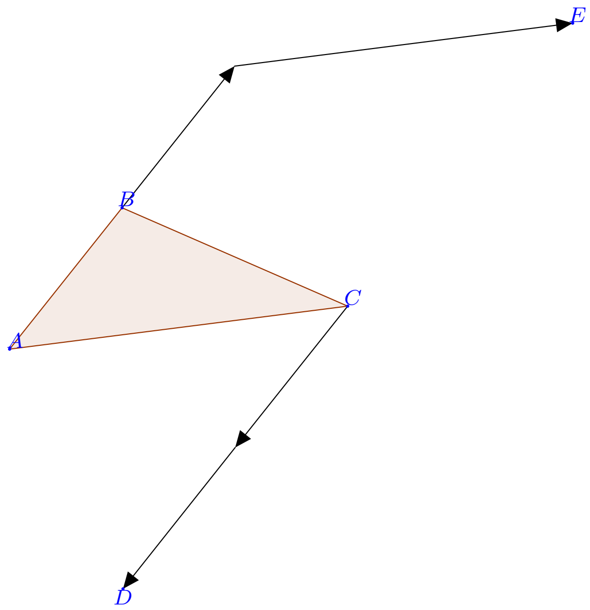
Exercice 5 : (4 points)

Soient ABC un triangle. Les points D et E sont tels que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$ (on note $2\overrightarrow{BA}$) et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(1) Construire E et D.

(2) Démontrer que C est le milieu de $[DE]$. *Toute trace de réflexion sera prise en compte.*

Solution:



(1)

(2) Pour montrer que C est le milieu de $[DE]$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EC}$.
On a

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{EC} & = & \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\ & = & -\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\ & = & -(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})++\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\ & = & \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\\ & = & \overrightarrow{CD}\end{array}$$