Durée 1 heure.
Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (6 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $3x + 2 \geqslant 0$

(2) $(x - 1)(-2x + 3) \geqslant 0$

(3) $x^2 - x < 0$

(4) $10(x - 5) - (x + 2)(x - 5) \geqslant 0$

Solution:

(1) $3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$, on a donc $S =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.

(2) On dresse un tableau de signes à partir des 2 facteurs, on a :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x + 3$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S = [1; \frac{3}{2}]$.

(3) $x^2 - x < 0 \Leftrightarrow (x - 1)x < 0$. On étudie le signe de chacun séparément puis on dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]0; 1[$.

(4) $10(x - 5) - (x + 2)(x - 5) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x - 5)(10 - x - 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x - 5)(8 - x) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		5		8		$+\infty$
$x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$8 - x$		$+$	0	$+$		$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S = [5; 8]$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans un repère, on considère les droites d'équation $y = x - 3$ et d'équation $x + 2y = 3$.

(1) Tracer les deux droites dans un plan.

(2) Montrer par le calcul que les droites sont sécantes.

(3) Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} y = & x - 3 \\ x + 2y = & 3 \end{cases}$$

(4) Résoudre par le calcul le système précédent.

Solution:

(1) On écrit la seconde équation sous forme réduite, c'est-à-dire ici, $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ Demander au professeur, si on ne comprend pas comment le faire.

(2) Il suffit de vérifier que les coefficients directeurs sont différents. Par lecture directe des équations, on sait qu'un coefficient est 1 et l'autre est $\frac{1}{2}$.

(3) Pour résoudre graphiquement l'équation, il suffit de repérer où se coupe les droites. Ici en $(3;0)$.

(4) Par substitution, on a :

$$\begin{cases} y = & x-3 \\ x+2y = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = & x-3 \\ x+2x-6 = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = & x-3 \\ 3x = & 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = & 0 \\ x = & 3 \end{cases}$$

La solution de ce système est donc $(3;0)$

Exercice 3 : (4 points)

Dans un repère, on donne trois points :

$$A(-1;2), B(3;7), C(5;7).$$

(1) Déterminer les coordonnées du milieu I de segment $[AB]$.

(2) Déterminer l'équation de la droite d parallèle à la droite (BC) et qui passe par I.

(3) Vérifier que la droite d passe par le milieu J du segment $[AC]$.

(4) Quelle propriété de géométrie vient-on d'illustrer ?

Solution:

(1) Selon le cours $I(1;\frac{9}{2})$

(2) Le coefficient directeur de (BC) est 0, on a donc la droite passant par I du type $y = 0\times x+p$. En sachant que cette droite passe par I, on en conclut que $y = 4{,}5$.

(3) J est de coordonnées $(2;4{,}5)$. Son ordonnée vérifie donc bien l'équation.

(4) On vient d'illustrer le théorème des milieux.

Exercice 4 : (5 points)

Pendant une expérience, l'altitude (en mètres) d'un projectile lancé à partir du sol est donnée à l'instant t (en secondes) par la formule :

$$h(t) = -5t^2 + 100t.$$

(L'origine correspond à $t = 0s$.)

(1) À quelle hauteur se trouve le projectile après 5 secondes.

(2) À quel instant le projectile retombe-t'il au sol ?

(3) Déterminer la période pendant laquelle l'altitude du projectile est supérieure ou égale à 320m.

Solution:

(1) Après 5 secondes, le projectile se trouve à une hauteur de $h(5) = 375$.

(2) Le projectile retombe au sol lorsque $h(t) = 0$ et $t > 0$. $-5t^2 + 100t = t(-5t+100) = 0$ implique que $t = 0$ ou $t = 20$. Donc le projectile retombera au sol après 20 secondes.

(3) Pour cela on résout $h(t) \geqslant 320$. On a $-5(t-10)^2 + 500 - 320 = -5(t-10)^2 + 180 = -5\left((t-10)^2 - 36\right) = -5(t-10-6)(t-10+6) = -5(t-16)(1-4)$.
On en conclut que l'objet sera au-dessus de 320m entre 4 et 16 secondes.