Exercice 1 : (6 points)

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(1) $S=\{-\frac{4}{3}\}$

(2) $S=\{0;1\}$

(3) On dresse un tableau de signes à partir des 2 facteurs, on a :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S=[-\frac{2}{3};\frac{2}{5}]$.

(4) On remarque que $25x^2-10x+1=(5x-1)^2$ Un carré est toujours positif ou nul. Ici $5x-1=0$ si et seulement si $x=\frac{1}{5}$.

Donc $S=]-\infty;\frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{5};+\infty[$.

(5) En utilisant les propriétés de la fonction carré on a :

$$S=]-2;-1[\cup]1;2[.$$

(6) On dresse un tableau de signes à partir des 3 facteurs, on a :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$5-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$9x+6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S=[-2;-\frac{2}{3}]\cup[\frac{5}{2};+\infty[$.

Exercice 2 : (8 points)

Partie A

(1) On remarque que le sommet a comme coordonnées $(3;2)$.

(2) Voir annexe.

(3) Graphiquement on voit que la courbe est au-dessus de la droite sur $[1;4]$.

Partie B

(1) Connaissant le sommet de la courbe, on sait que $f(x)=a(x-3)^2+2$, où a est le coefficient dominant du polynôme. On a $f(4)=a(4-3)^2+2$, on sait par ailleurs que $f(4)=0$, on a donc $a+2=0$ et $a=-2$. Donc

$$f(x)=-2(x-3)^2+2=-2x^2+12x-16.$$

(2) On a $f(x)>2x-8\Leftrightarrow -2x^2+12x-16>2x-8\Leftrightarrow -2x^2+10x-8$.

(3) Par développement, $-2(x-1)(x-4)=-2(x^2-4x-x+4)=-2x^2+10x-8=g(x)$.

(4) Résoudre cette inéquation revient à résoudre $-2(x-1)(x-4)>0$, le tableau de signes de $-2(x-1)(x-4)$ est :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
-2		$-$		$-$		$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S=]1;4[$.

(5) a. Les solutions de $g(x)$ sont 1 et 4, l'axe de symétrie passe par le milieu de $(1;0)$ et $(4;0)$, l'équation est donc $x=2{,}5$.

b. On a $g(2{,}5)=4{,}5$ et donc :

$$g(x)=-2(x-2{,}5)^2+4{,}5.$$

Exercice 3 : (6 points)

(1) a.

$$-10(x-45)^2+17640=-10(x^2-90x+2024)+17640=-10x^2+900-20250+17640=-10x^2+1800x-2600=B(x).$$

b. De la forme canonique, on a immédiatement :

x	3		45		100
f	0	$\nearrow$	17640	$\searrow$	-12610

c. Pour avoir un bénéfice maximal, il faut fabriquer 45 centaines de boîtes.

(2) a. On a :

$$-10(x-45)^2+17640=-10\left((x-45)^2-1764\right)=-10\left((x-45)^2-42^2\right)=-10(x-3)(x-87).$$

b. En dressant le tableau de signes, on a : $B(x)\geqslant 0$ lorsque $x\in[3;87]$. On a un bénéfice positif lorsque l'on vend entre 300 et 8700 boîtes.