Exercice 1 : (8 points)

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(1) On identifie le facteur commun $(x+1)$. On a :

$$\begin{aligned}&(4+5x)(x+1)-(2-x)(x+1)\\=&(4+5x-2+x)(x+1)=(2+6x)(x+1).\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{S=\{-\frac{1}{3};-1\}}$.

(2)

$$\begin{aligned}(-2x+1)=(3-x) \text{ ou } (-2x+1)=-(3-x)\\ -x=2 \text{ ou } -3x=-4.\end{aligned}$$

$\boxed{S=\{-2;\frac{4}{3}\}}$

(3) En développant, on obtient l'équation :

$$(x^2-3x+2)=x^2-5x+2x-10 \Leftrightarrow 2=-10$$

On a donc $\boxed{S=\{\}}$

(4) En passant tout du même coté, on a :

$$-2x+6+4x-7-5x<0 \Leftrightarrow -3x-1<0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}.$$

On a donc $\boxed{S=]-\frac{1}{3};+\infty[}$

(5) $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ et $3-2x>0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$.
Le tableau de signes du produit est :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty[$.

(6) $(2x+1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq-\frac{1}{2}$ et $1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$. Le tableau de signes du produit est :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$+$		$+$	0	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\boxed{S=]-1;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[}$

Exercices 2 : Exercice sur les vecteurs (6 points)

(1) Pour que les vecteurs soient colinéaires, il suffit que $(1+x)\times3-2\times2x=0 \Leftrightarrow 3-x=0$ donc que $x=3$.

(2) a. On a $\overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$ et $\overrightarrow{CB}\binom{9}{11}$.

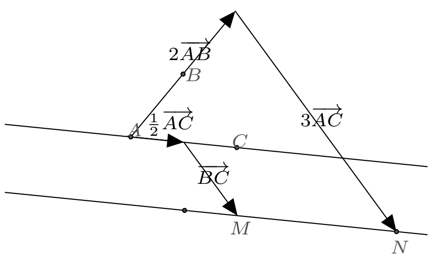
b. $3\times11-4\times9=33-36=-3\neq0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas colinéaires, donc les points ne sont pas alignés.

(3) a. On a $\overrightarrow{AB}\binom{-1+\sqrt{5}}{-1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{-4}{\sqrt{5}+1}$.

b. $(-1+\sqrt{5})\times(\sqrt{5}+1)-4=5-1-4=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont donc alignées.

Exercices 3 : Exercice plus difficile sur les vecteurs (4 points)

(1)



(2) Avec la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\\&=-\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\frac{4}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les droites (MN) et (AC) sont donc parallèles.

Exercices 4 : Exercice sur les probas (6 points)

(1)

	Réussite au bac en 2013	Échec au bac en 2013	Total
Passage en 1ère validé par le conseil de classe	435	15	450
Passage en 1ère validé par l'appel	25	25	50
Total	460	40	500

(2) a. $\bar{A}$ est l'événement : « l'élève a raté son bac. »
$A\cap B$ est l'événement : « l'élève a eu son bac et a fait appel en Seconde. »

b. $P(A)=\frac{460}{500}=\frac{23}{25}$. $P(B)=\frac{50}{500}=\frac{1}{10}$ et $P(A\cap B)=\frac{25}{500}=\frac{1}{20}$.

c. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{485}{500}$. Donc $\boxed{\frac{97}{100}}$.

(3) a. Il y a 50 élèves qui sont passés en Seconde. Parmi ceux là 25 ont eu leur bac. La probabilité est donc $\frac{1}{2}$.

b. En utilisant la même méthode, on montre que la probabilité que l'élève n'ait pas eu son bac est de $\frac{15}{450} = \frac{1}{30}$.

Problème (10 points)

Partie A : Étude des fonctions :

(1) On a $0{,}2x^2 + 0{,}1x = 0{,}1x(2x+1)$. $\boxed{S = \{0; -\frac{1}{2}\}}$.

(2) a. $0{,}2(x+0{,}25)^2 - 0{,}0125 = 0{,}2x^2 + 0{,}1x + 0{,}0125 - 0{,}0125 = 0{,}2x^2 + 0{,}1x$.

b. On en déduit :

x	$-\infty$	$-0{,}25$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$-0{,}0125$	↗ $+\infty$

,

puis

x	0	10
f	0 ↗	21

(3) a. Pour tracer g, on prend les points A et B tels que :

	A	B
x	0	$11{,}5$
y	5	$5{,}5$

b. Graphiquement, on remarque que 5 est l'unique solution sur $[0; 10]$.

c. On remarque que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[5; 10]$ et en-dessous sinon.

(4)

$$0{,}2(x+3{,}25)^2 - 13{,}6125 = 0{,}2\left((x+3{,}5)^2 - 68{,}0625\right) = 0{,}2(x+3{,}25+8{,}25)(x+3{,}25-8{,}25) = 0{,}2(x+11{,}5)(x-5).$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$, sont $\boxed{5 \text{ et } -11{,}5}$.

Dans l'intervalle $[0; 10]$ $\boxed{\text{il y a une unique solution qui est 5}}$.

Partie B : Modélisation économique :

(1) $f(2) = 0{,}2 * 2^2 + 0{,}1 * 2 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$ et $g(2) = -1{,}2 * 2 + 11{,}5 = 9{,}1$. Si l'objet coûte 200 euros, il y aura 1000 objets en vente. Si l'objet coûte 200 euros, il y aura 9100 personnes qui souhaitent acheter l'objet. Le rapport est alors déséquilibré, il y a trop d'acheteur et pas assez d'objets.

(2) Les variations sont cohérentes avec le modèle, plus le prix est cher, moins il y a d'acheteurs.

(3) Le point d'équilibre du marché a lieu lorsque $f(x) = g(x)$. C'est-à-dire pour 5000 euros l'objet.

(4) $g(x) = 0$ lorsque $-1{,}2x = -11{,}5$, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{11{,}5}{1{,}2} = \frac{115}{12} \approx 9{,}58 < 10$. On remarque alors que lorsque le prix atteint la valeur de 1000 euros, le nombre d'acheteur est négatif, ce qui n'a pas de sens.

Question ouverte sur les fonctions (3 points)

La fonction h est affine car sa représentation est une droite. Cette droite passe par les points de coordonnées, $(0; 1)$ et $(0{,}5; 0)$. Le coefficient directeur de celle-ci est donc -2, l'ordonnée à l'origine est 1, on a donc :

$$\boxed{\text{h(x) = -2x+1.}}$$

Les deux autres courbes sont des paraboles. En utilisant les variations, on sait que le coefficient dominant de f est positif et de g est négatif.

Le sommet de $\mathscr{C}_f$ est $(1; -2)$ et le sommet de $\mathscr{C}_g$ est $(-2; 1)$. On a donc $f(x) = a_f(x-1)^2 - 2$ et $g(x) = a_g(x+2)^2 + 1$.

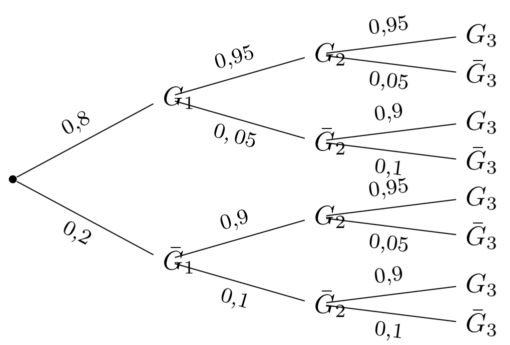
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passent par le point $(0; -1)$, donc $a_f - 2 = -1$, c'est-à dire $a_f = 1$, de même $a_g = -\frac{1}{2}$.

Et donc :

$\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 2, \text{ et } g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1}$.

Question ouverte sur les probas (3 points)

On construit d'abord un arbre représentant le problème. On nomme G_i l'événement : « Le joueur a gagné la i-ème partie. »On construit alors l'arbre :



L'événement A correspond à la succession d'événements G_1, G_2, G_3, donc $P(A) = 0{,}8 \times 0{,}95 \times 0{,}95 = 0{,}722$

L'événement B correspond à l'événement contraire de A, on a donc : $P(B) = 1 - 0{,}722 = 0{,}288$.

L'événement C correspond à toutes les branches qui contienne une victoire, on a donc $P(C) = 0{,}8 \times 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}9$.