Durée 2 heures.
Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (9 points)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(1) $0{,}1x^2 + 0{,}2x = 0$

(2) $(3x-1)^2 = (4-x)^2$

(3) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

(4) $\frac{1}{x} < 0$

(5) $4(1-x) + 3x < 16 - 3(4-2x)$

(6) $(3+x)(5-2x) \leqslant 0$

(7) $\frac{3+x}{x-2} \geqslant 0$

(8) $\frac{3+x}{x-2} < 1$

(9) $\frac{(7-x)(8+3x)}{(2x+1)^2} \geqslant 0$

Exercice 2 : (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x+1}$.

(1) Déterminer son ensemble de définition.

(2) Vérifier que $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2x+1}$.

(3) En déduire une représentation graphique de f ainsi que son tableau de variations.

(4) Résoudre $f(x) = -1$ et $f(x) = 2$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre posé sur la face BCD. Soit I le milieu de $[AC]$, J milieu de $[AD]$ et K sur $[AB]$ tel que $AK = \frac{1}{4}AB$.

(1) Placer les points I, J et K.

(2) Montrer que (IJ) et (CD) sont parallèles.

(3) Montrer que (KI) et (BC) sont coplanaires. En déduire qu'elles sont sécantes en un point que l'on appellera M. Placer le point sur la figure de l'annexe.

(4) On admet que les droites (KJ) et (BD) sont sécantes en un point N. Démontrer que l'intersection de (IJK) et (BCD) est la droite (MN).

(5) Soit L un point du segment $[IJ]$. On admet que la droite (KL) et le plan (BCD) se coupent en un point H. Montrer que H appartient à (MN).

Exercice 4 : (8 points)

1000 élèves de différents lycées ont mesuré la masse volumique de laiton par la méthode du flacon. Les résultats arrondis au dixième ont été regroupés dans le tableau dans l'annexe 2.

(1) Calculer en pourcentage les fréquences de la répartition, selon la masse mesurée par ces 1000 élèves, puis calculer les fréquences cumulées croissantes et compléter le tableau.

(2) Construire la courbe des fréquences cumulées.

(3) Déterminer la médiane, ainsi que les premier et troisième quartiles de la série des masses. En déduire l'écart interquartile.

(4) Déterminer la moyenne des masses observées.

Exercice 5 : (10 points)

Soit $ABEFA'B'E'F'$ et $BCDEB'C'D'E'$ deux cubes côtes à côtes. **Cf figure sur l'annexe**.

Soit M un point du segment $[BC]$.

Partie A :

(1) Sur la figure de l'annexe que l'on complétera tout au long de la partie A, tracer la droite Δ parallèle à (CD) passant par M.

(2) Monter que Δ est contenue dans le plan (BCD).

(3) Monter que Δ et (ED) sont coplanaires. En déduire qu'elles sont sécantes en un point que l'on nommera N.

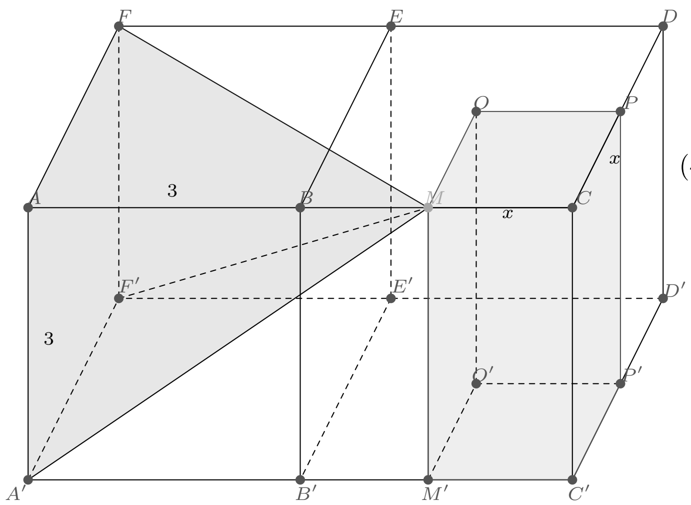
(4) Montrer que Δ est parallèle à $(C'D')$.

(5) Soit M' appartenant à $[B'C']$.

(6) Soit Δ' l'intersection des plans (NMM') et $(B'C'D')$. Montrer que Δ' et Δ sont parallèles et que $M' \in \Delta'$.

Partie B :

Dans la figure ci-dessous, le solide $M'O'P'C'MOPC$ est un pavé droit et le solide $AFF'A'M$ est une pyramide.
On suppose que les cubes ont pour des arrêtes de longueur 3 et que M est sur $[BC]$ tels que $MC = x$ et $P \in [CD]$ et $CP = x$.



(1) Montrer que $x \in [0; 3]$.

(2) Déterminer en fonction de x le volume de $M'O'P'C'MOPC$, on l'appellera V_D.

(3) On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V_Y = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h$ où h est la hauteur de la pyramide.

  a. Quelle est la nature de la base $AFF'A'M$?

  b. En déduire le volume de cette pyramide que l'on nommera V_y.

(4) On cherche à déterminer la position de M pour que les deux solides est le même volume, c'est-à-dire à déterminer x tel que $V_D = V_y$.
Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $3x^2 + 3x - 18 = 0$ sur $[0; 3]$.

Partie C :

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.

(1) Montrer que $f(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{75}{4}$.

(2) Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0; 3]$.

(3) Résoudre $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(4) En utilisant la partie B question 4, conclure sur le problème posé.

Exercice 6 : (5 points)

Ce problème est ouvert, c'est-à-dire avec prise d'initiative !

Le prix d'un article est en baisse. En janvier 2014, il était de 350€, en mars 2014 de 320 euros.

On a tracé 3 courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ passants par les points $A(0; 350)$ et $B(2; 320)$ dans le graphique donné dans l'annexe.

On a tracé aussi les droites d'équations $y = 305$ et d'équations $x = -1$ et le point $C(\frac{23}{8}; \frac{5071}{16})$ minimum de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Modélisation :

(1) Déterminer le nom de chacune des fonctions associées à ces courbes.

(2) Donner les expressions algébriques de ces fonctions (**toute idée sera valorisée**).

Choix du modèle :

L'article en question est un smart-phone. Quelle est d'après-vous la modélisation la plus cohérente pour représenter l'évolution à venir du prix de l'article ? On justifiera avec soin.