Exercice 1 : (9 points)

(1) $S = \{0; -2\}$

(2) $(3x-1)^2 - (4-x)^2 = (3x-1-4+x)(3x-1+4-x) = (4x-5)(2x+3)$, donc $S = \{\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}\}$

(3) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$, donc $S = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

(4) Selon le cours, on a $x < 0$

(5) $4(1-x) + 3x < 16 - 3(4-2x) \Leftrightarrow 4 - 4x + 3x - 16 + 12 - 6x < 0 \Leftrightarrow -7x < 0$, donc $S =]0; +\infty[$

(6) On étudie le signe de $(3+x)(5-2x)$:
$3 + x > 0$ si $x > -3$ et $5 - 2x > 0$ si $x < \frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; -3] \cup [\frac{5}{2}; +\infty[$

(7) Cette fraction est définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. On étudie le signe de $\frac{3+x}{x-2}$
$3 + x > 0$ si $x > -3$ et $x - 2 > 0$ si $x > 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S =]-\infty; -3]\cup]2; +\infty[$.

(8) $\frac{3+x}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} < 0$. On a donc $S =]-\infty; 2[$

(9) $\frac{(7-x)(8+3x)}{(2x+1)^2} \geqslant 0$ Cette fraction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		$-\frac{1}{2}$		7		$+\infty$
$7-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$8+3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
quotient		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S = [-\frac{8}{3}; -\frac{1}{2}[\cup] - \frac{1}{2}; 7]$

Exercice 2 : (3 points)

(1) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

(2)
$$2 + \frac{1}{2x+1} = \frac{4x+2+1}{2x+1} = \frac{4x+3}{2x+1} = f(x).$$

(3) $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, on trace donc la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. On trace aussi la droite d'équation $y = 2$. Il ne reste qu'a tracer la courbe en remarquant qu'elle est décroissante puis décroissante.

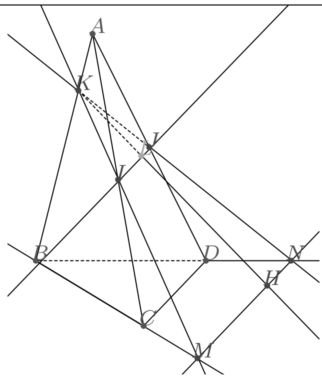
Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

(4)
$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{4x+3}{2x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+3+2x+1}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x+4}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 6x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

La solution est $-\frac{2}{3}$
$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2x+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} = 0$.
Il n'y a donc pas de solution à cette équation.

Exercice 3 : (5 points)



(1)

(2) I est le milieu de $[AC]$, J est le milieu de $[AD]$. En appliquant le théorème des milieux au triangle ACD, on a $(IJ)//(CD)$.

(3) K appartient à la droite (AB) donc au plan (ABC), I appartient à la droite (AC) donc au plan (ABC), on en déduit que (KI) est contenue dans le plan (ABC). Les droites (KI) et (BC) sont donc coplanaires.

En utilisant la réciproque du théorème des milieux dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$, donc si (KI) était parallèle à (BC) alors K serait le milieu de $[AB]$. Les droites (KI) et (BC) ne sont donc pas parallèles. Comme elles sont coplanaires, on en déduit qu'elles sont sécantes.

(4) M est l'intersection de (IK) avec la droite (BC), M appartient donc à l'intersection de (KIJ) et (BCD).

N est l'intersection de (KJ) et (BD), N appartient donc à l'intersection de (KIJ) et (BCD).

(BC) et (BD) ne sont pas confondues et sécantes en B, donc M est disjoint de N.

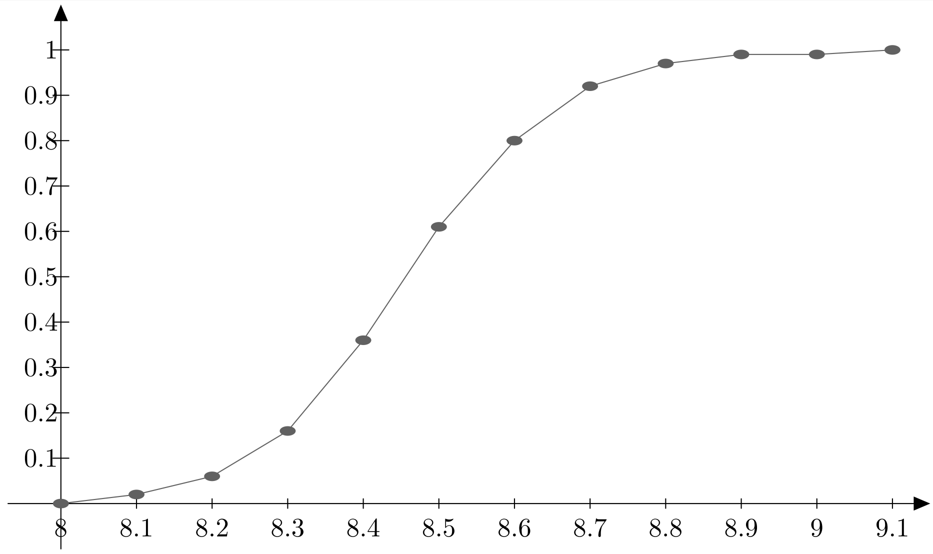
L'intersection de (BCD) et (IJK) est donc la droite (MN).

(5) L appartient à (IJ) donc (KL) est contenue dans le plan (IJK). L'intersection de (KL) et du plan (BCD) appartient donc à l'intersection de (BCD) avec (IJK), donc à la droite (MN).

Exercice 4 : (8 points)

(1) Le tableau est :

M. vol en g/cm^3	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9	9,1
Effectifs	3	19	42	100	200	250	190	113	50	20	7	6
Fréquence	0,003	0,019	0,042	0,1	0,2	0,25	0,19	0,113	0,05	0,02	0,007	0,006
Fréquence cumulée	0,003	0,022	0,064	0,164	0,364	0,614	0,804	0,917	0,967	0,987	0,994	1



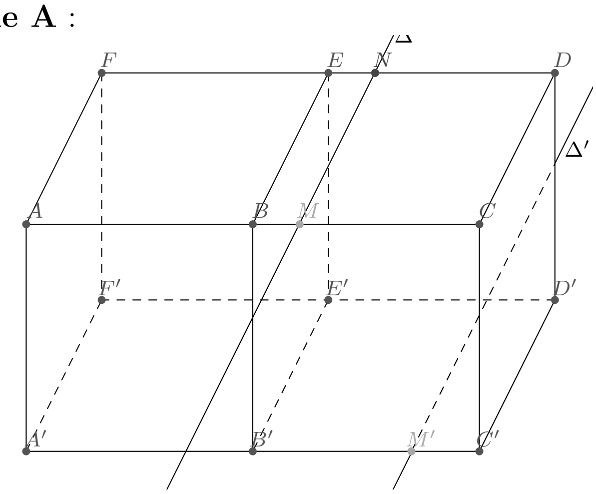
(2)

(3) la médiane est de 8.5, le premier quartile est de 8.4 est le troisième de 8.6. L'écart interquartile est de 0.2.

(4) La moyenne est de 8,51

Exercice 5 : (10 points)

Partie A :



(1)

(2) $\Delta//(CD)$ donc Δ et (CD) sont coplanaires, c'est-à-dire, Δ est contenue dans le plan (MCD). M est sur le segment $[BC]$ donc $(MCD) = (BCD)$ et Δ dans le plan (BCD).

(3) E appartient au plan (BCD) car $ABCD$ est un carré dans ce plan. $\Delta//(DC)$ donc (ED) et Δ ne sont pas parallèles, comme ces droites sont coplanaires, elles sont sécantes.

(4) $\Delta//(CD)$ et $(CD)//(C'D')$ ($CDD'C'$ est un carré). Par transition, $\Delta//(C'D')$.

(5) On sait que :
— Δ est contenue dans le plan (MNM') ($\Delta = (MN)$)
— $(C'D')$ est contenue dans le plan $(B'C'D')$
— $\Delta//(C'D')$
Selon le théorème du toit, les plans (MNM') et $(B'C'D')$ se coupent en une droite parallèle à Δ.
M' appartient à $B'C'$, M' appartient donc au plan $B'C'D'$ et à l'intersection des plans $B'C'D'$ et (MNM').

Partie B :

(1) x est une longueur, donc positif. M est sur $[BC]$, donc $x \leqslant BC = 3$.

(2) $M'O'P'C'MOPC$ est un prisme, on a donc $V_D = CP \times MC \times C'C = 3x^2$.

(3) a. La base $AFF'A'M$ est un carré.

b. Le volume de cette pyramide est donc $V_Y = \frac{1}{3} \times 3^2 \times (AB + BM)$, avec $BM = 3 - x$. Donc $V_Y = 3(6 - x)$

(4) $V_D = V_Y \Leftrightarrow 3x^2 = 3(6 - x) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 18 = 0$

Partie C :

(1) $3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{75}{4} = 3 \times (x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{75}{4} = 3x^2 + x - \frac{72}{4} = 3x^2 + x - 18 = f(x)$.

(2) Le coefficient dominant est positif donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{75}{4}$	$\nearrow$	

x	0		3
f	-18	$\nearrow$	18

(3)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{75}{4} = 0 \Leftrightarrow 3\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

L'équation a donc deux solutions 2 et -3.

(4) Le problème de la partie B se ramène à résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$. Selon la question précédente, cette équation a une solution sur cet intervalle.

Les volumes sont égaux lorsque $x = 2$.

Exercice 6 : (5 points)

Modélisation :

(1) $\mathscr{C}_f$ est une parabole donc f est une fonction polynôme du second degré.

$\mathscr{C}_g$ est une droite, donc g est une fonction affine.

$\mathscr{C}_h$ est une hyperbole, donc h est une fonction homographique.

(2) On sait que C est le minimum de $\mathscr{C}_f$, donc $f(x) = a(x - \frac{23}{8})^2 + \frac{5071}{16}$. On sait de plus que $f(0) = 350$, on a donc $a \times -\frac{23}{8} + \frac{5071}{16} = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

En développant, on obtient $f(x) = 4x^2 - 23x + 350$.

On sait que $\mathscr{C}_g$ est une droite passant par A et B. Le coefficient directeur de la droite de g est donc $\frac{320-350}{2} = -20$. L'ordonnée à l'origine est 350.

On a donc $g(x) = -20x + 350$.

L'hyperbole n'est pas définie en -1, le dénominateur de h est donc $x + 1$.

L'hyperbole ne coupe pas la droite d'équation $y = 305$, donc h est du type $305 + \frac{a}{x+1}$ avec a à déterminer. Comme $h(0) = 350$, on a $305 + a = 350$ et donc $a = 45$. On en déduit que $h(x) = 305 + \frac{45}{x+1}$.

Choix du modèle :

Le prix ne sera jamais négatif, la modélisation par g n'est donc pas adaptée.

Le prix est sensé baisser, donc la modélisation par f n'est pas adaptée.

La modélisation par h parait donc la plus adaptée.