BACCALAURÉAT BLANC

Session Avril 2014

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Mathématiques - Série ES

Sujet

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Chaque candidat devra indiquer le numéro de sa classe et le nom de son enseignant sur la copie.

L'exercice 4 sur cette copie n'est à faire que pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité. Les élèves suivant cet enseignement feront l'exercice de spécialité distribué en annexe et le rédigeront sur une feuille à part.

Le sujet ne sera pas rendu.

Bon courage !!!

Exercice 1 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

(1) On pose $I = \int_0^1 3\mathrm{e}^{3x}dx$. On peut affirmer que :

a. $I = \mathrm{e}^3 - 1$ b. $I = 19{,}1$ c. $I = 3\mathrm{e}^3 - 3$ d. $I = 1 - \mathrm{e}^3$

(2) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

a. $]-\infty;+\infty[$ b. $[0;+\infty[$ c. $]-\infty;0]$ d. $[-3;3]$

(3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\ln x - 2x + 5,$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

a. $y = x + 2$ b. $y = -x + 4$ c. $y = 3x + 1$ d. $y = x + 3$

(4) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}05$. La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par :

a. $S = 2 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{12}}{1 - 1{,}05}$ b. $S = 2 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{13}}{1 - 1{,}05}$ c. $S = 1{,}05 \times \dfrac{1 - 2^{13}}{1 - 2}$ d. $S = 1{,}05 \times \dfrac{1 - 2}{1 - 2^{12}}$

(5) On choisit au hasard un réel de l'intervalle $[-2;5]$. Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[-1;1]$?

a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{2}{7}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 0,7

Exercice 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication $F1$ et $F2$.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A : Étude des chaînes de production

La chaîne de production F2 semble plus fiable que la chaîne de production $F1$. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70% des petits pots proviennent de la chaîne $F1$ et 30% de la chaîne F2.

La chaîne $F1$ produit 5% de compotes non conformes et la chaîne $F2$ en produit 1%.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

— E : « Le petit pot provient de la chaîne $F2$ »
— C : « Le petit pot est conforme. »

(1) Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

(2) Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production $F1$. »

(3) Déterminer la probabilité de l'évènement C.

(4) Sachant que le petit pot est conforme, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne $F2$. *On arrondira le résultat à 10^{-2} près.*

Partie B : Chaîne $F1$

On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne $F1$, associe sa teneur en sucre. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}005$. Chaque résultat trouvé devra faire référence à une propriété du cours (l'utilisation unique de la calculatrice ne suffit pas).

(1) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne $F1$ soit conforme.

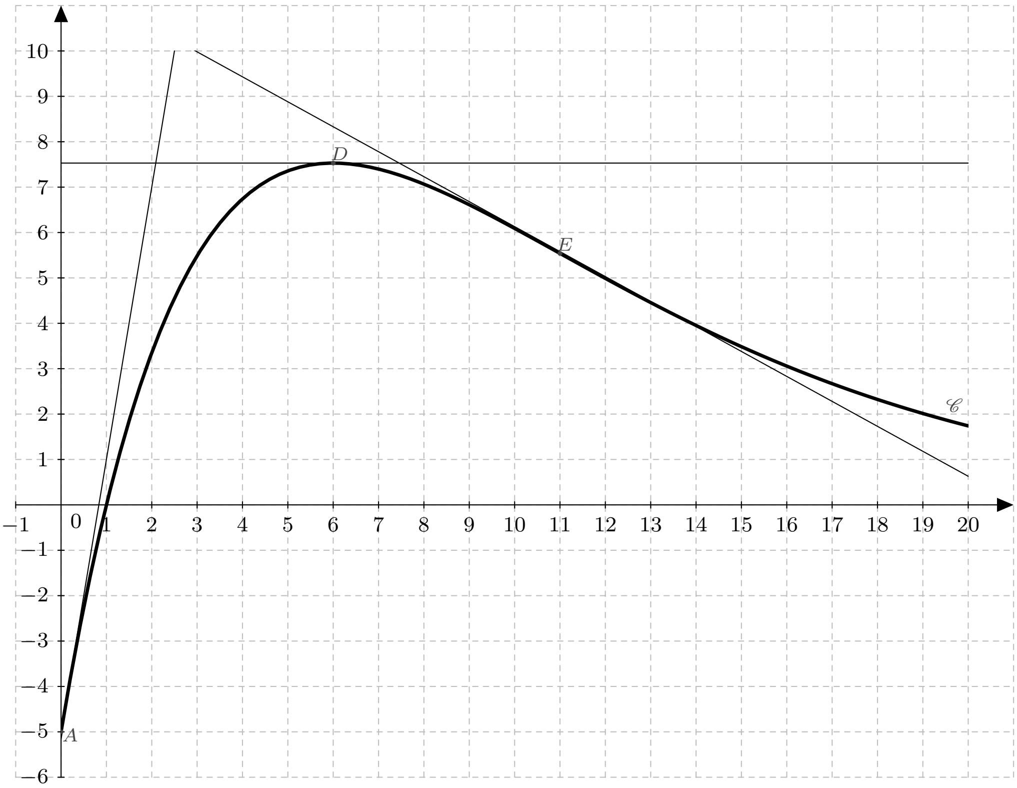
(2) L'usine range chaque pot dans une des 3 catégories :
— si la teneur en sucre est inférieure à 0,165, le pot ira dans la catégorie discount.
— si la teneur en sucre est comprise entre 0,165 et 0,18 le pot ira dans la catégorie standard.
— dans les autres cas, il sera mis au rebut.
Quelle est la probabilité (on arrondira de façon pertinente) que le pot arrive dans la catégorie discount, dans la catégorie standard, ou qu'il soit mis au rebut ?

Exercice 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1. Donner les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2. Indiquer si la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
3. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = (5x - 5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = (-x + 6)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,20]$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0\,;6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α.
4. (a) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;20]$ par $F(x) = (-25x - 100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;20]$.
   (b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;8]$. Donner sa valeur exacte.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\ 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.
   Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Exercice 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.
Au premier janvier 2014, on comptait 5000 abonnés à ce jeu en ligne et on prévoit que :
— 80% des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,
— le nombre de nouveaux abonnés sera de 2000 tous les ans.

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 5000 {Initialisation}
	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à X la valeur $0{,}8X + 2000$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce jeu en ligne.

Partie B

1. Vérifier qu'au premier janvier 2015 le nombre d'abonnés sera égal à 6000.
2. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 5000$ et $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 2000$, pour tout entier n.
   Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 10000$.
   (a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 10000 - 5000 \times 0{,}8^n$.
4. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1. L'objectif du concepteur du jeu est d'atteindre au moins 12000 adhérents.
   Cet objectif est-il réalisable ?
2. Même question si l'objectif est d'atteindre au moins 8000 adhérents.