Exercice 1 :
(5 points)

(1) Réponse A : $I = e^3 - 1$ (une primitive de $3e^{3x}$ est e^{3x})

(2) Réponse B : $[0;+\infty]$ (on dérive deux fois la fonction et on résout $f''(x) > 0$)

(3) Réponse A : $y = x + 2$

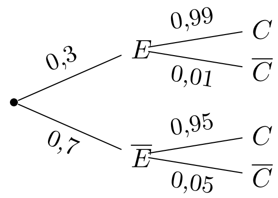
(4) Réponse A : $S = 2 \times \dfrac{2 - 1{,}05^{12}}{1 - 1{,}05}$ (Il y a 12 termes pas 13)

(5) Réponse B : $\frac{2}{7}$ ($\dfrac{1-(-1)}{5-(-2)} = \frac{2}{7}$)

Exercice 2 :
(5 points)

Partie A : Étude des chaˆ ı nes de production

(1) L'arbre est le suivant :



(2) Cet événement est $\overline{E} \cap C$. On a $P(\overline{E} \cap C) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(C) = 0{,}7 \times 0{,}95 = 0{,}665$.
La probabilité cherchée est donc 0,665

(3) Selon la formule des probabilités totales, on a : $P(C) = P(C \cap E) + P(C \cap \overline{E}) = 0{,}665 + 0{,}297 = 0{,}962$.

(4) On cherche à calculer la probabilité : $P_C(E) = \frac{P(C \cap E)}{P(C)} = \frac{0{,}297}{0{,}962} \approx 0{,}31$.

Partie B : Chaˆ ı ne $F1$

(1) On a $P(0{,}16 \leqslant X \leqslant 0{,}18) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$, selon une propriété du cours.

(2) Si la teneur est inférieure à 0,165, le pot ira dans la catégorie discount.
$P(X \leqslant 0{,}165) = P(X \leqslant \mu - \sigma) = \frac{1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)}{2} \approx 0{,}16$. En utilisant la propriété du cours : $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$.
La probabilité que le pot aille dans la catégorie discount est 0,16.
Si la teneur est supérieure à 0,18, le pot ira au rebut.
$P(X \geqslant 0{,}18) = P(X \geqslant \mu + 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)}{2} \approx 0{,}025$.
La probabilité que le pot aille au rebut est 0,025.
La probabilité que le pot aille dans la catégorie standard est donc environ $1 - 0{,}025 - 0{,}16 = 0{,}815$.

Exercice 3 :
(5 points)

Commun à tous les candidats

1. $f(0) = -5$ (point A) ; $f(1) = 0$ (point B) ; $f'(0) = \dfrac{12}{2} = 6$ et $f'(6) = 0$ (point D)
2. La courbe $\mathcal{C}$ semble avoir le point E comme point d'inflexion.
3. $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$; $28 \leqslant I \leqslant 32$; *c'est l'aire de la partie hachurée en rouge sur le graphique.*
4. L'équation $f(x) = 4$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[2\,;3]$ et l'autre dans l'intervalle $[13\,;14]$.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 4$.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $f(x) = (5x - 5)\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}$.

1. $f'(x) = 5 \times \mathrm{e}^{-0,2\,x} + (5x - 5) \times \left(-0{,}2\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}\right) = 5\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} - x\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} + \mathrm{e}^{-0,2\,x} = 6\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} - x\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}$
$= (-x + 6)\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}$
2. (a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0,2\,x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x + 6$.
$-x + 6 > 0 \iff 6 > x \iff x < 6$ donc :
   - $f'(x) > 0$ sur $[0\,;6[$;
   - $f'(6) = 0$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]6\,;20]$.

   (b) $f(0) = -5\,\mathrm{e}^{0} = -5$;
$f(6) = (5 \times 6 - 5)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 6} = 25\,\mathrm{e}^{-1,2} \approx 7{,}53$;
$f(20) = (5 \times 20 - 5)\,\mathrm{e}^{-4} = 95\,\mathrm{e}^{-4} \approx 1{,}74$; d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		6		20
$f'(x)$		+	0	−	
f	-5	↗	$25\,\mathrm{e}^{-1,2}$	↘	$95\,\mathrm{e}^{-4}$

3. La fonction f est continue sur $[0;6]$, strictement croissante sur $[0;6]$ et $f(0) = -5 < 4$ et $f(6) = 25\,\mathrm{e}^{-1,2} \approx 7{,}5 > 4$
Selon le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution sur $[0;6]$.
En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice :
$$\left.\begin{array}{l} f(2{,}256\,2) \approx 3{,}999\,98 < 4 \\ f(2{,}256\,3) \approx 4{,}000\,22 > 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [2{,}256\,2\,;2{,}256\,3]$$
donc la valeur arrondie au millième de α est 2,256.

4. (a) Soit F la fonction définie sur $[0\,;20]$ par $F(x) = (-25x-100)\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}$.
$F'(x) = (-25)\times \mathrm{e}^{-0,2\,x} + (-25x-100)\left(-0{,}2\times \mathrm{e}^{-0,2\,x}\right) = -25\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} + 5x\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} + 20\,\mathrm{e}^{-0,2\,x}$
$= -5\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} + 5x\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} = (5x-5)\,\mathrm{e}^{-0,2\,x} = f(x)$
Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;20]$.

(b) La valeur moyenne de la fonction f sur $[4\,;8]$ est $M = \dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}\,x$.
$$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(8) - F(4) = \left((-25\times 8-100)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 8}\right) - \left((-25\times 4-100)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 4}\right)$$
$$= -300\,\mathrm{e}^{-1,6} - \left(-200\,\mathrm{e}^{-0,8}\right) = 200\,\mathrm{e}^{-0,8} - 300\,\mathrm{e}^{-1,6}$$
Donc $M = \dfrac{1}{4}\left(200\,\mathrm{e}^{-0,8} - 300\,\mathrm{e}^{-1,6}\right) = 50\,\mathrm{e}^{-0,8} - 75\,\mathrm{e}^{-1,6}$

Partie C

1. f est croissante sur $[\alpha;6]$ et $f(\alpha) = 4$, donc $f(x) > 4$ sur $[\alpha;6]$. f est croissante sur $[\alpha;6]$ et $f(\alpha) = 4$, donc $f(x) > 4$ sur $[\alpha;6]$.
Ainsi, $f(x) \geqslant 4$ pour $x \in [\alpha\,;\beta]$.
Pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 4 000 € il faut déterminer x pour que $f(x) \geqslant 4$, c'est-à-dire pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta \iff 2{,}256 \leqslant x \leqslant 13{,}903$. Comme x désigne des centaines d'objets, il faut que le nombre d'objets produits soit compris entre 226 et 1 390.

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets, ce qui correspond à $x \in [4\,;8]$.
La valeur moyenne du bénéfice est donnée par : $\dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}\,x \times 1\,000 = \left(50\,\mathrm{e}^{-0,8} - 75\,\mathrm{e}^{-1,6}\right)\times 1\,000 \approx 7\,324{,}2$.
La valeur moyenne du bénéfice est 7 324 €.

Exercice 4 :

(5 points)

Partie A

1. Si on donne à n la valeur 2, la variable de boucle i prend successivement les deux valeurs $i = 1$ puis $i = 2$.
Avant d'entrer dans la boucle, on affecte à X la valeur 5000.
Quand $i = 1$, on entre une fois dans la boucle et X prend la valeur $0{,}8\,X + 2000$ soit $0{,}8\times 5000 + 2000 = 6000$.
Quand $i = 2$, on entre une deuxième fois dans la boucle et X prend la valeur $0{,}8\,X + 2000$ soit $0{,}8\times 6000 + 2000 = 6800$.
On sort de la boucle et l'algorithme affiche donc la valeur 6800.

2. L'année $n = 2$ correspond à $2014 + 2 = 2016$. On peut donc supposer qu'en 2016 il y aura 6800 adhérents à ce jeu.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 5000$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8\times a_n + 2000$.
Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 10000$ donc $a_n = b_n + 10000$.
(a) Pour tout n, $b_{n+1} = a_{n+1} - 10000 = 0{,}8\,a_n + 2000 - 10000 = 0{,}8(b_n + 10000) - 8000 = 0{,}8\,b_n + 8000 - 8000 = 0{,}8\,b_n$
$b_0 = a_0 - 10000 = 5000 - 10000 = -5000$
Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $b_0 = -5000$.
(b) D'après le cours, on peut dire que pour tout entier naturel n, $b_n = b_0\times q^n = -5000\times 0{,}8^n$.

2. Pour tout n, $b_n = -5000\times 0{,}8^n$; or $a_n = b_n + 10000$. Donc pour tout entier naturel n, $a_n = 10000 - 5000\times 0{,}8^n$.

3. La suite (b_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $0 < 0{,}8 < 1$ donc la suite (b_n) est convergente et a pour limite 0.
D'après les théorèmes sur les limites de suites, comme pour tout n, $a_n = b_n + 10000$, on peut dire que la suite (a_n) est convergente et a pour limite 10 000.

Partie C

1. Pour tout n, $a_n = 10000 - 5000\times 0{,}8^n$ donc a_n est toujours inférieur à 12000.
Donc l'objectif d'atteindre 12000 adhérents est impossible.

2. On va résoudre l'inéquation $a_n \geqslant 8000$:
$a_n \geqslant 8000 \iff 10000 - 5000\times 0{,}8^n \geqslant 8000 \iff 2000 \geqslant 5000\times 0{,}8^n \iff \frac{2000}{5000} \geqslant 0{,}8^n$
$\iff \frac{2}{5} \geqslant 0{,}8^n \iff \ln(\frac{2}{5}) \geqslant \ln(0{,}8^n) \iff \ln(\frac{2}{5}) \geqslant n\times\ln(0{,}8) \iff \frac{\ln(\frac{2}{5})}{\ln(0{,}8)} \leqslant n$,
car $\ln 0{,}8 < 0$.
$\frac{\ln(\frac{2}{5})}{\ln(0{,}8)} \approx 4{,}1$ donc à partir de $n = 5$, a_n est supérieur à 8000 ; l'objectif est donc réalisable.
À la calculatrice, on trouve $a_4 = 7952$ et $a_5 \approx 8362$.