## Exercice 1 : (5 points)

(1) a. $C_1 = 0{,}9 \times 100 + 5 = 95$ et $C_2 = 0{,}9 \times 95 + 5 = 90{,}5$

b. $B_{n+1} = C_{n+1} - 50 = 0{,}9 \times C_n + 5 - 50 = 0{,}9 \times (B_n + 50) - 45 = 0{,}9B_n$.

$\boxed{B \text{ est donc une suite géométrique de raison } 0{,}9}$.

c. $B$ est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $B_0 = C_0 - 50 = 50$. On a donc : $\boxed{B_n = 50 \times 0{,}9^n}$

On en déduit que $\boxed{C_n = 50 \times 0{,}9^n + 50 = 50(1 + 0{,}9^n)}$.

(2) a. $0{,}9 < 1$, donc $0{,}9^n$ tend vers 0 en $+\infty$. On a alors $\boxed{\lim_{n\to\infty} B_n = 0}$

b. i) Il suffit de modifier la ligne 10 par `Afficher N`.

ii) On modifie la ligne 5 par `Tant que B >5`.

(3) a. La formule exprimant la somme d'une suite géométrique nous donnes :

$$T_n = 50 \times \frac{1 - 0{,}9^{n+1}}{1 - 0{,}9} = 500 \times (1 - 0{,}9^{n+1}).$$

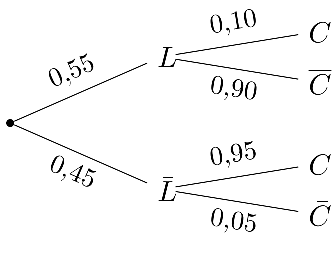
b. On a

$$\begin{aligned}
T_n &> 400 \\
500 \times (1 - 0{,}9^{n+1}) &> 400 \\
-0{,}9^{n+1} &> \frac{4}{5} - 1 \\
0{,}9^{n+1} &< \frac{1}{5} \\
(n+1)\ln(0{,}9) &< \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\
n + 1 &> -\frac{\ln 5}{\ln(0{,}9)} \\
n &> 14{,}2
\end{aligned}$$

La plus petite valeur de $n$ telle que $T_n > 400$ est $\boxed{\text{n=15}}$.

## Exercice 2 : (5 points)

(1) L'arbre est le suivant :




(2) $P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0{,}55 \times 0{,}95$ donc $\boxed{P(L \cap C) = 0{,}5225}$.

(3) $P(C) = P(L \cap C) + P\left(\overline{L} \cap C\right) = 0{,}5225 + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(C) = 0{,}5225 + 0{,}45 \times 0{,}1$, donc $\boxed{P(C) = 0{,}5675}$.

(4) $P_C(L) = \frac{P(C \cap L)}{P(C)} = \frac{0{,}5225}{0{,}5675}$ donc $\boxed{P_C(L) \approx 0{,}9207}$.

(5) a. On sait que $P(C) = 0{,}5675$ et on choisit 4 élèves au hasard donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}5675$.

b. Pour $k$ entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 4$, on sait que $n = 4$, $p = 0{,}5675$ et $1 - p = 0{,}4325$ donc : $\boxed{p(X = 0) = (1-p)^4 = 0{,}4325^4 \approx 0{,}0350}$.

c. $\boxed{p(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}5675^2 \times 0{,}4325^2 \approx 0{,}3615}$.

## Exercice 3 : (5 points)

(1) a. Le coût moyen diminue sur $]0;2]$ et augmente sur $[2;3]$

b. Le minimum du coût moyen est atteint pour une production mensuelle de $\boxed{\text{2 tonnes}}$ et vaut approximativement 650 euros.

c. On trace sur la calculatrice la droite d'équation $y = 4$. On remarque que cette droite coupe la courbe pour $x$ compris entre 0 et 0,5 : on appellera ce nombre $\alpha$. Si l'entreprise fabrique moins de $\alpha$ tonnes de ce produit elle aura un coût moyen de fabrication supérieur à 4000 euros.

(2) La fonction $x \mapsto 0{,}005\mathrm{e}^{2x} + 1$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $]0;3]$. $x \neq 0$, donc $C$ est dérivable sur $]0;3]$ comme quotient de fonctions dérivables.
On pose $u(x) = 0{,}005\mathrm{e}^{2x} + 1$ et $v(x) = x$, on a $u'(x) = 0{,}01\mathrm{e}^{2x}$ et $v' = 1$.
Donc :

$$C'(x) = \frac{0{,}01\mathrm{e}^{2x} \times x - \big(0{,}005\mathrm{e}^{2x} + 1 \times 1\big)}{x^2} = \frac{0{,}01x\mathrm{e}^{2x} - 0{,}005\mathrm{e}^{2x} - 1}{x^2}.$$

(3) a. $f$ est la somme de fonctions dérivables sur $]0;3]$. On reconnaît un produit, on pose donc $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$.
Donc :

$$f'(x) = 0{,}01 \times (1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\mathrm{e}^{2x}) - 0{,}01\mathrm{e}^{ex} = 0{,}02x\mathrm{e}^{2x}.$$

b. $x > 0$ sur $]0;3]$ et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;3]$ comme produit de fonctions positives et $f$ est strictement croissante sur $]0;3]$.

c. $f$ est dérivable donc continue sur $]0;3]$ et strictement croissante sur le même intervalle. Donc $f$ vérifie les mêmes propriétés sur $[2;2{,}5]$. $f(2) \approx -0{,}18$ et $f(2{,}5) \approx 1{,}97$.
Selon un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre réel $\alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$.
En tabulant la fonction sur la calculatrice, on trouve $f(2) < 0$ et $f(2{,}1) > 0$. On a donc $\alpha \approx 2$.

d. Comme $f$ est strictement croissante sur $]0;3]$ et que $f(\alpha) = 0$, on en conclut que $f(x)$ est négative lorsque $x \in ]0;\alpha]$ et positive lorsque $x \in [\alpha;3]$

(4) Comme $x^2 > 0$, $C'(x)$ est du même signe que $f(x)$. On en déduit que $C$ est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha;3$.
Le minimum de $C$ est donc obtenu pour une production de $\alpha$ tonnes du produit.

## Exercice 4 : (5 points)

(1) Réponse C : $\frac{\ln 3}{4}$

(2) Réponse C : $6a - \ln 16$

(3) Réponse D : $f'(x) = \ln x + 1$

(4) Réponse B : Courbe 2, il faut à la fois travailler sur les variations et sur le coefficient de la tangente qui donne $f'(5) = 1$.

(5) Réponse C : Convexe sur $]0;+\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.