BACCALAURÉAT BLANC

Session Février 2014

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Mathématiques - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Sujet

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Chaque candidat devra indiquer le numéro de sa classe et le nom de son enseignant sur la copie.

Le sujet ne sera pas rendu.

Exercice 1 : (5 points)

On considère la suite C définie par $C_0 = 100$ et pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = 0{,}9 \times C_n + 5.$$

(1) Expression explicite du terme général de la suite

a. Calculer C_1 et C_2.

b. On pose $B_n = C_n - 50$. Montrer que la suite B_n est une suite géométrique de raison 0,9 dont on précisera le premier terme.

c. En déduire l'expression de B_n en fonction de n puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n = 50 \times (1 + 0.9^n)$

(2) Etude de la suite auxiliaire B_n.

a. Quelle est la limite de B_n lorsque n tend vers $+\infty$?

b. L'algorithme suivant a été ébauché pour déterminer le rang à partir duquel B_n est inférieur à un seuil donné.

On se contentera d'indiquer les lignes à modifier.

```
1     Initialisation :
2         Affecter la valeur 100 à B
3         Affecter la valeur 0 à N
4     Traitement :
5         Tant que B > 10
6             Affecter la valeur 0.9*B à B
7             Affecter la valeur N+1 à N
8         Fin tant que
9     Sortie :
10        Afficher ...
```

i) Compléter cet algorithme de façon à ce qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $B_n \leqslant 10$.

ii) Modifier cet algorithme pour qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $B_n \leqslant 5$.

(3) Etude de la somme des premiers termes de B :
On définit la suite T par $T_n = B_0 + B_1 + ... + B_n$.

a. Montrer que pour tout entier n, $T_n = 500 \times (1 - 0.9^{n+1})$

b. Déterminer par le calcul la plus petite valeur de n telle que $T_n > 400$.

Exercice 2 : (5 points)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.

L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

— L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
— C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

(1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

(2) Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.

(3) Montrer que $P(C) = 0{,}567\,5$.

(4) Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

(5) On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Exercice 3 : (5 points)

Une entreprise fabrique chaque mois x tonnes d'un certain produit, avec x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 3]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production mensuelle de x tonnes est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie par :

$$C(x) = \frac{0{,}005\ \mathrm{e}^{2x} + 1}{x}.$$

(1) À l'aide de la calculatrice :

a. conjecturer en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0\ ;\ 3]$;

b. estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;

c. dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4000 euros. On précisera la méthode utilisée.

(2) On désigne par C' la fonction dérivée de la fonction C. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 3]$:

$$C'(x) = \frac{0{,}01x\mathrm{e}^{2x} - 0{,}005\ \mathrm{e}^{2x} - 1}{x^2}.$$

(3) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = 0{,}01x\mathrm{e}^{2x} - 0{,}005\ \mathrm{e}^{2x} - 1.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 3]$

$$f'(x) = 0{,}02x\mathrm{e}^{2x}.$$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 3]$.

c. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle $[2\ ;\ 2{,}5]$. Donner la valeur arrondie au dixième du nombre réel α.

d. Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 3]$.

(4) À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes du produit.

Exercice 4 : (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse juste rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

(1) L'équation $e^{4x} - 3 = 0$ admet comme solution :

a. $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$ b. 0,2746530722 c. $\dfrac{\ln 3}{4}$ d. $\dfrac{\ln 3}{\ln 4}$

(2) $2\ln\left(\dfrac{e^{3a}}{4}\right)$ est égal à :

a. $6a - \ln 8$ b. $3a + \ln 16$ c. $6a - \ln 16$ d. $6a - \ln 4$

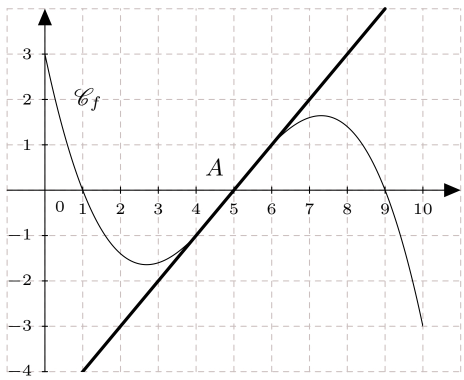
(3) La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$ admet une fonction dérivée f' telle que :

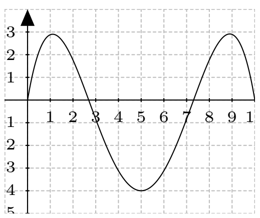
a. $f'(x) = 1$ b. $f'(x) = \ln x$ c. $f'(x) = \frac{1}{x}$ d. $f'(x) = \ln x + 1$

(4) On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0;10]$.

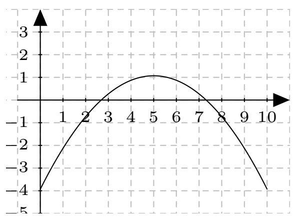
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 5 est tracée.

Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée en justifiant votre choix.

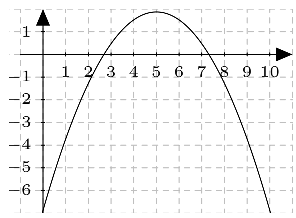




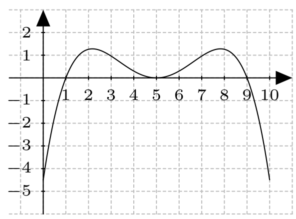
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

(5) La fonction $2x + 1 - \ln x$ est :

a. concave sur $]0;0{,}5[$ puis convexe sur $]0{,}5;+\infty[$

b. convexe sur $]0;2]$ puis affine sur $]2;+\infty[$

c. convexe sur $]0;+\infty[$

d. concave sur $]0;+\infty[$