

Durée 2 heures.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 :

(5 points)

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples. Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria. On s'intéresse aux évènements suivants :

F : « la table est occupée par une famille »

S : « la table est occupée par une personne seule »

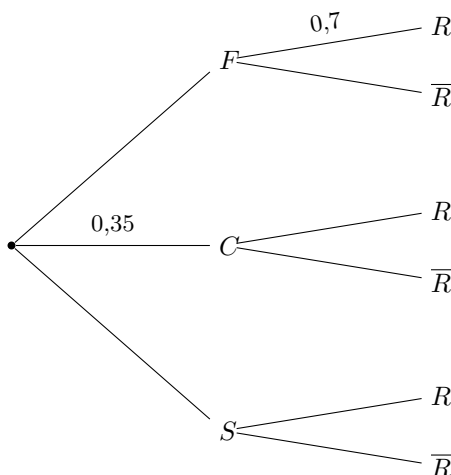
C : « la table est occupée par un couple »

R : « le serveur reçoit un pourboire »

On note \bar{A} l'évènement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A , sachant B .

Partie A :

- (1) D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $P(F)$ et $P_S(R)$.
- (2) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



- (3) a. Calculer $P(F \cap R)$.
b. Déterminer $P(R)$.
- (4) Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.

On admet que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2} .

- (1) Calculer
 - a. La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
 - b. $p(X \geq 20)$.
- (2) Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.

Exercice 2 :

(4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

On ne demande pas de justification.

Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.

En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de 0,236.

On a $p = 0,236$.

- (1) La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :
A. 0,236 B. 0 C. 0,068 D. 0,764
- (2) Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :
(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)
A. [0,198; 0,274] B. [0,134; 0,238] C. [0,191; 0,281] D. [0,192; 0,280]
- (3) La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieur à 0,01 vaut :
A. $n = 200$ B. $n = 400$ C. $n = 21167$ D. $n = 27707$
- (4) Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles. Au seuil de 95%, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :
(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)
A. [0,35; 0,45] B. [0,33; 0,46] C. [0,39; 0,40] D. [0,30; 0,50]

Exercice 3 :

(6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par :

$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}.$$

On a représenté **en annexe**, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

— La courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f ;

— La droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

- (1) a. Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$, où f' désigne la fonction dérivée de f .
b. Résoudre dans l'intervalle $[0; 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
- (2) On nomme α le point d'intersection de la droite Δ et de la courbe \mathcal{C}
a. Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
b. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0; 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

Partie B : Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.

La fonction f , définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimée en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

- (1) a. Dédurre de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
b. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,5€. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x de centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
- (2) a. Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 5]$.
b. Montrer que, sur l'intervalle $[0; 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
- (3) On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.