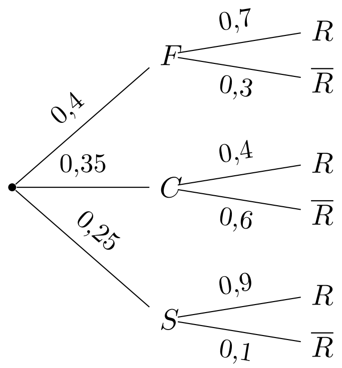
Exercice 1 : (5 points)

Partie A :

(1) D'après l'énoncé, on a $P(F) = 0{,}4$ et $P_S(R) = 0{,}9$.

(2) L'arbre est le suivant :



(3) a. $P(F \cap R) = P(F)P_F(R) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

b. Selon les probabilités totales : $P(R) = P(F \cap R) + P(F \cap C) + P(F \cap S) = 0{,}28 + 0{,}35 \times 0{,}4 + 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}645$

(4) $P_R(C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(R)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}645} \approx 0{,}217$. La probabilité que la table soit occupée par un couple, sachant que le serveur a reçu un pourboire est d'environ 0,217.

Partie B

(1) a. À la calculatrice on obtient $P(6 \leqslant X \leqslant) \approx 0{,}95$. On peut remarquer aussi (mais ce n'était pas demandé) que $P(6 \leqslant X \leqslant) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$. La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soient compris entre 6 et 24 euros est d'environ 0,95.

b. $P(X \geqslant 20) = \dfrac{1 - P(10 \leqslant X \leqslant 20)}{2} \approx 0{,}13$.

(2) $P_{6 \leqslant X \leqslant 24}(X \geqslant 20) = \dfrac{P(20 \leqslant X \leqslant 24)}{P(6 \leqslant X \leqslant 24)} \approx \dfrac{0{,}11}{0{,}954} \approx 0{,}12$. La probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros est de 0,12 (à 10^{-2} près)

Exercice 2 : (4 points)

(1) La proposition correcte est C. On utilise une loi binomiale de paramètres 10 et 0,236.

(2) La proposition correcte est la A. Il faut utiliser la formule du cours.

(3) La proposition correcte est la D. Il suffit de calculer les amplitudes des intervalles de fluctuation pour $n = 27707$ et $n = 21167$, seul la première amplitude vérifie l'équation.

(4) La proposition correcte est la B. Il faut utiliser la formule du cours.

Exercice 3 : (6 points)

Partie A

(1) a. La dérivée de $x \mapsto \exp(-x + 0{,}5)$ est $-\exp(-x + 0{,}5)$. On a donc $f'(x) = 1 - \exp(-x + 0{,}5)$.

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x+0{,}5} = 1 \Leftrightarrow -x + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$.

c. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x+0{,}5} < 1 \Leftrightarrow -x + 0{,}5 < 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$.

d. On a donc :

x	0		0,5		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$1 + \mathrm{e}^{0{,}5}$	$\searrow$	2,5	$\nearrow$	$6 + \mathrm{e}^{-4{,}5}$

(2) a. $2 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}5$.

b. Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui sont en dessous de la droite Δ. $S = [\alpha; 5]$.

Partie B : Application

(1) a. Le minimum de f est atteint en 0,5, le nombre de cartes à produire pour atteindre un coût minimum est donc de 50.

b. On a : $B(x) = R(x) - f(x)$, où $R(x)$ est la recette en centaines d'euros. Donc $B(x) = 0{,}5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0{,}5}$.

(2) a. On a $B'(x) = 0{,}5 + \mathrm{e}^{-x+0{,}5}$. $\mathrm{e}^{-x+0{,}5}$ est strictement positif pour tout $x \in [0; 5]$. La somme de deux nombres strictement positifs est strictement positif, d'où $B'(x) > 0$ et donc B est strictement croissante sur $[0; 5]$.

b. B est continue sur $[0; 5]$, B est strictement croissante sur $[0; 5]$ et $B(0) = -1 - \mathrm{e}^{1/2} < 0$ et $B(5) = 2{,}5 - 1 - \mathrm{e}^{-4{,}5} \approx 1{,}49 > 0$.

On a $B(2{,}32) \approx -0{,}002 < 0$ et $B(2{,}33) \approx 0{,}005$. Donc $2{,}32 < \alpha < 2{,}33$.

(3) La fonction est croissante, on a donc $B(x) > 0$ lorsque $x > \alpha$.

La quantité minimale est donc de 233 cartes.