TES 4 DST 2 18 octobre 2013

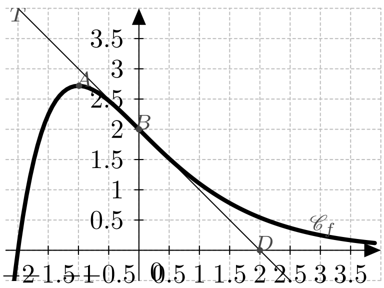
Exercice 1 : (7 points)

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;4]$.

La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $B(0;2)$ et A d'abscisse -1.

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B passe par le point $D(2;0)$.



En utilisant les données graphiques, indiquer :

(1) le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2;4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,5 des solutions éventuelles ;

(2) les solutions de l'équations $f'(x) = 0$;

(3) l'équation de T ;

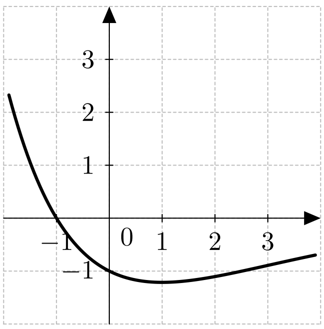
(4) la valeur de $f'(0)$;

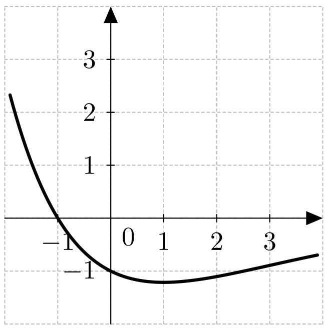
(5) le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2;4]$;

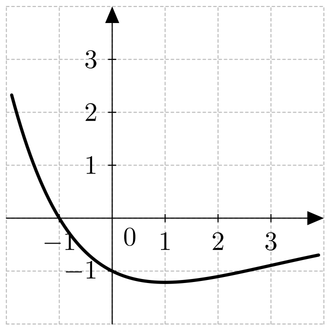
(6) si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion ; si oui l'indiquer ;

(7) la convexité de f ;

(8) laquelle, parmi ces trois courbes représente la courbe de la dérivée de f (une justification est attendue).







Solution:

(1) Il y a 2 solutions x_1 et x_2, on a $-2 < x_1 < -1{,}5$ et $1 < x_2 < 1{,}5$.

(2) $S = \{-1\}$ car la fonction admet un maximum en -1.

(3) Par lecture graphique on a : $y = -x + 2$.

(4) On en déduit que $f'(0) = -1$.

(5) En étudiant les variations de f, on voit que $f'(x) > 0$ sur $[-2;-1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1;4]$.

(6) La tangente traverse le point B donc le point B est un point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$.

(7) La fonction f est concave sur $[-2;0]$ et convexe ensuite.

(8) $f'(0) = -1$ donc la courbe 2 n'est pas possible. B est un point d'inflexion donc $f'(0)$ est un extremum. Donc seule la courbe 1 correspond.

Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

(1) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[-3; 3]$.

(2) Étude de $f(x) = 2$

a. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ sur $[-3; 3]$.

b. Donner une valeur approchée à 0,01 près de celles-ci.

(3) Étude de la convexité et de la concavité de f

a. Étudier la convexité et la concavité de f sur $[-3; 3]$.

b. Donne le ou les points d'inflexions de f sur cet intervalle.

Solution:

(1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $[-3; 3]$. On a $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$; $\Delta = 16$ et $x_1 = \frac{7}{3}$ et $x_2 = 1$. $3 > 0$, on a donc :

x	-3		1		$\frac{7}{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-92	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{76}{27}$	$\nearrow$	4

(2) a. La fonction f est définie sur $[-3; 3]$ et :
— f est continue sur $[-3; 1]$;
— f est strictement croissante sur $[-3; 1]$;
— $2 \in [f(-3); f(1)]$;
donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-3; 1]$.

Le tableau de variation nous montre que la fonction admet comme minimum $\frac{76}{27} > 1$ sur $[1; 3]$. Donc $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
$f(x) = 1$ admet donc une unique solution sur $[-3; 3]$.

b. Avec la calculatrice, on voit que $f(0) < 1 < f(1)$, puis $f(0{,}1) < 1 < f(0{,}2)$ et enfin $f(0{,}16) < 1 < f(0{,}17)$ admet comme solution approchée à 10^{-2} près 0,16.

(3) a. f' est une fonction polynôme donc dérivable sur $[-3; 3]$. On a donc $f''(x) = 6x - 10$.

$6x - 10 > 0$ lorsque $x > \frac{5}{3}$ donc f est convexe sur $[\frac{5}{3}; 3]$ et est concave sur $[-3; \frac{5}{3}]$.

b. $f''(\frac{5}{3}) = 0$ et change de signe en $\frac{5}{3}$. Donc le point $\left(\frac{5}{3}; \frac{92}{27}\right)$.

Exercice 3 : (7 points)

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.

Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.

On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120\,000$.

(1) Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.

(2) a. Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

b. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.

Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90\,000$.

(3) a. Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n$ en fonction de n.

b. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
Montrer que $S_n = 6\,000\,000 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$.

c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

Solution:

(1) La production diminue de 2% par an, on a donc $U_{n+1} = 0{,}98 \times U_n$. (U_n) est donc une suite géométrique. On a donc :

$$U_n = U_0 \times (0{,}98)^n = 120\,000 \times 0{,}98^n.$$

(2) a. On a $U_5 = 120\,000 \times 0{,}98^5 \approx 108\,470{,}49$. En 2005, l'industriel a donc produit 108 470 jouets en 2005.

b. $0{,}98 < 1$, donc la suite U est strictement décroissante.
Avec la calculatrice, on voit que $U_9 \approx 100\,049$ et $U_{10} \approx 98\,048$. Le nombre de jouets sera strictement inférieur à 100000 à partir 2010

```
1   Variables :        A est un réel
2                      n est un entier naturel
3
4   Initialisation :   Affecter à A la valeur 120 000
5                      Affecter à n la valeur 0
6
7   Traitement :       Tant que A ⩾ 90 000
8                         n prend la valeur n + 1
9                         A prend la valeur A × 0,98
10                     Fin Tant que
11
12  Sortie :           Afficher n
```

(3) a. Le cours nous donne $1 + 0{,}98 + \cdots + 0{,}98^n = \frac{1-0{,}98^{n+1}}{0{,}02}$

b. On a alors $S_n = 120\,000 \times \frac{1-0{,}98^{n+1}}{0{,}02} = 600\,000 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$.

c. On a $S_{14} \approx 1\,568\,585$. Le nombre total de jouets fabriqués les 15 premières années est donc 1 568 585.