Durée 1 heure 30.
Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

(1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (7x - 23)\exp(x)$. L'équation $h(x) = 0$

A. a pour solution 2,718
C. a deux solutions sur $\mathbb{R}$
B. a une solution sur $[0; +\infty]$
D. a une solution sur $[-\infty; 0]$

(2) Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

A. $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}$ C. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ D. e^{a}

(3) Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

A. $\sqrt{\mathrm{e}^{a}}$ B. $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ C. $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ D. $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

(4) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}05$. La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par :

A. $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{12}}{1-1{,}05}$ B. $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{13}}{1-1{,}05}$ C. $S = 1{,}05 \times \frac{1-2^{13}}{1-2}$ D. $S = 1{,}05 \times \frac{1-2}{1-2^{12}}$

Exercice 2 : (9 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.

Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

On donne $u_0 = 42$.

(1) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6$.

(2) On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

```
Variables :
   U, N
Initialisation :
   Mettre 42 dans U
   Mettre 0 dans N
Traitement :
   Tant que U < 100
      U prend la valeur U × 0,95 + 6
      N prend la valeur N +1
   Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

(3) À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2013 + n)$.

(1) Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

(2) On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(3) En déduire la forme générale de w puis celle de v.

(4) Déterminer la limite de v.

(5) Interpréter ce résultat.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5\ ;\ 8]$ par :

$$f(x) = \frac{\left(-4x^2 + 5\right)}{\mathrm{e}^x} + 3$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ +8]$.

Exercice 3 : (7 points)

(1) a. Démontrer que pour tout réel x de $[0{,}5\ ;\ +8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(4x^2 - 8x - 5\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ +8]$.

(2) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 8]$.
Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :
pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0{,}5\ ;\ 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.
Chaque réponse sera justifiée.

(1) Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.

(2) a. Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?

b. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

(3) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?