Exercice 1 : (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

(1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (7x - 23)\exp(x)$. L'équation $h(x) = 0$

A. a pour solution 2,718

B. a une solution sur $[0; +\infty]$

C. a deux solutions sur $\mathbb{R}$

D. a une solution sur $[-\infty; 0]$

(2) Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

A. $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ **B.** $\dfrac{1}{\mathbf{e}^{\frac{1}{a}}}$ C. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ D. e^{a}

(3) Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

A. $\sqrt{\mathbf{e}^{a}}$ B. $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ C. $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ D. $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

(4) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}05$. La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par :

A. $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{12}}{1-1{,}05}$ B. $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{13}}{1-1{,}05}$ C. $S = 1{,}05 \times \frac{1-2^{13}}{1-2}$ D. $S = 1{,}05 \times \frac{1-2}{1-2^{12}}$

Exercice 2 : (8 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.

Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

On donne $u_0 = 42$.

(1) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6$.

(2) On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

```
Variables :
  U, N
Initialisation :
  Mettre 42 dans U
  Mettre 0 dans N
Traitement :
  Tant que U < 100
    U prend la valeur U × 0,95 + 6
    N prend la valeur N +1
  Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

(3) À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Solution:

(1) Chaque année, on supprime 5% des ouvrages, donc le nombre d'ouvrage est multiplié par 0,95, puis on ajoute 6 mille ouvrage ce qui explique l'addition par 6 dans la formule.

(2) Cet algorithme calcule tous les termes de la suite u qui sont plus petits que 100. Il affiche le premier indice N tel que $u_N > 100$.

Cet indice N est celui de l'année $2013 + N$ tel que le nombre d'ouvrage soit supérieur à 100000.

(3) En utilisant la calculatrice, on obtient 35.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2013 + n)$.

(1) Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

(2) On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(3) En déduire la forme générale de w puis celle de v.

(4) Déterminer la limite de v.

(5) Interpréter ce résultat.

Solution:

(1) Il suffit de remplacer la ligne contenant :

```
U prend la valeur U* 0,95+6
```

par

```
U prend la valeur U* 0,95+4
```

(2) Montrons que w est une suite géométrique. On a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{v_{n+1} - 80}{v_n - 80} = \frac{0{,}95 \times v_n - 76}{v_n - 80} = \frac{0{,}95(v_n - 80)}{v_n - 80} = 0{,}95.$$

Donc w est une suite géométrique de raison 0,95.

(3) On en déduit que $w_n = w_0 \times 0{,}95^n$. Comme $w_0 = v_0 - 80 = -38$, on a $w_n = -38 \times 0{,}95^n$.
On a alors $v_n = w_n - 80 = -38 \times 0{,}95^n + 80$.

(4) On sait que $\lim_{n\to\infty} 0{,}95^n = 0$, on a alors $\lim_{n\to\infty} w_n = 80$.

(5) On sait que la suite $(0{,}95^n)$ est décroissant donc $(-38 \times 0{,}95^n + 80)$ est croissante. Comme la limite de la suite est 80, on en déduit donc que la médiathèque aura à terme un nombre de livres proche de 8000 sans jamais le dépasser.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5\ ;\ 8]$ par :

$$f(x) = \frac{(-4x^2 + 5)}{\mathrm{e}^x} + 3$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ +8]$.

Exercice 3 : (8 points)

(1) a. Démontrer que pour tout réel x de $[0{,}5\ ;\ +8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(4x^2 - 8x - 5\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ +8]$.

(2) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 8]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Solution:

(1) $x \mapsto -4x^2 + 5$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une fonction exponentielle donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule jamais.
La fonction $x \mapsto -4x^2 + 5\mathrm{e}^x + 3$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0{,}5; 8]$.
On pose $u(x) = -4x^2 + 5$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, on a $u'(x) = -8x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
On a donc

$$f'(x) = \frac{-8x\mathrm{e}^x - (-4x^2+5)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{(4x^2 - 8x - 5)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} = \frac{4x^2 - 8x - 5}{\mathrm{e}^x}.$$

La fonction exponentielle étant toujours positive, f' est du signe de $4x^2 - 8x - 5$.
Cherchons à résoudre $4x^2 - 8x - 5 = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) \\ &= 144 > 0 \text{ donc il y a deux solutions réelles à cette équation.} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc : $\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \dfrac{8-12}{2\times 4} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{8+12}{2\times 4} \\ x_1 & = & -0{,}5 & \text{et} & x_2 & = & 2{,}5. \end{array}$ Puisque $x \mapsto 4x^2 - 8x - 5$ est représentée par une parabole convexe (son coefficient dominant est positif), on a le tableau de signe suivant pour f'.

x	0.5		2.5		8
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	$\frac{4}{\mathrm{e}^{1/2}} + 3$	$\searrow$	$-\frac{20}{\mathrm{e}^{5/2}+3}$	$\nearrow$	$-\frac{251}{e^8+3}$

(2) On peut ici résoudre algébriquement l'équation.
$f(x) = 3 \iff (-4x^2+5)\mathrm{e}^{-x} + 3 = 3 \iff (-4x^2+5)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff -4x^2 + 5 = 0 \iff 4x^2 = 5 \iff x^2 = 1{,}25 = \dfrac{5}{4}$.
$f(x) = 3 \iff x = \sqrt{1{,}25}$ ou $x = -\sqrt{1{,}25}$ et une seule de ces solutions est positive
On a donc

$$x_0 = \sqrt{1{,}25} \simeq 1{,}12.$$

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :

pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5\ ;\ 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

Chaque réponse sera justifiée.

(1) Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.

(2) a. Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?

b. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

(3) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.

On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.

Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

Solution:

(1) $f(5) = 3 - 95e^{-5} \simeq 2{,}36$.

Ainsi, le coût moyen unitaire de production, pour une production de 500 litres, est d'environ 236 €.

(2) a. D'après la partie A, f atteint son minimum pour $x = 2{,}5$ et le minimum global de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est $f(2{,}5) \simeq 1{,}36$. A fortiori, ce minimum est le minimum de f sur $[0{,}5\ ;\ 8]$.

Donc l'entreprise doit produire 250 litres de peinture pour minimiser le coût moyen unitaire de production, et le coût minimal est d'environ 136 €.

b. Non, l'entreprise ne peut réaliser de bénéfice puisque la production d'un hectolitre lui coûte 136 € dans le meilleur des cas, d'après la question précédente, tandis que la vente d'un hectolitre ne lui rapporte que 100 €. Elle vend donc à perte dans tous les cas.

(3) Le seuil de rentabilité de l'entreprise est la valeur à partir de laquelle le prix moyen unitaire de production d'un hectolitre est inférieur à 300 €. Cela revient donc à chercher la plus petite valeur de x telle que $f(x) = 3$. Or on a vu dans la partie A que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0.

Le seuil de rentabilité pour cette entreprise est donc x_0 hectolitres, soit environ 112 L.