Exercice 1 : (8 points)

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5\,;\,60]$ par :

$$C(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
   Montrer que, pour tout $x \in [5\ ;\ 60]$, $C'(x) = \dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20}{x^2}$.
2. On considère la fonction f définie sur $[5\,;\,60]$ par

   $$f(x) = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20.$$

   (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5\,;\,60]$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5\,;\,60]$.
   (c) Donner un encadrement à l'unité de α.
   (d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5\,;\,60]$.
3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5\,;\,60]$.
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

   (a) $C(x) = 2$. (b) $C(x) = 5$.

Solution:

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5\,;\,60]$ par :

$$C(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. C est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[5; 60]$ et on a :
   $C'(x) = \dfrac{0,1\mathrm{e}^{0,1x} \times x - (\mathrm{e}^{0,1x} + 20) \times 1}{x^2} = \dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20}{x^2}$
2. On considère la fonction f définie sur $[5\,;\,60]$ par

   $$f(x) = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20.$$

   a. f est dérivable sur $[5; 60]$ comme produit de fonction dérivable et
   $f'(x) = 0,1\mathrm{e}^{0,1x} + 0,1x \times 0,1\mathrm{e}^{0,1x} - 0,1\mathrm{e}^{0,1x} = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x}$.
   Comme $x \in [5\ ;\ 60]$ et qu'un exponentielle est toujours positif, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [5\ ;\ 60]$ et par suite, f est croissante.

   b. Comme f est continue, strictement croissante, que $f(5) \approx -20,82$, $f(60) \approx 1\,997,1$ et $0 \in [f(5)\ ;\ f(60)]$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, l'équation $f(x) = 0$ aura une unique solution α sur $[5\ ;\ 60]$.

   c. En utilisant la calculatrice, comme $f(25) \approx -1,726$ et $f(26) \approx 1,5419$, on a l'encadrement suivant : $25 \leqslant \alpha \leqslant 26$.

   d. f étant strictement croissante, $f(x)$ sera négatif sur $[5,\alpha]$ et positif sur $[\alpha; 60]$

3. Le signe de $C'(x)$ dépend du signe de $f(x)$ car $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	5		α		60
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de C	$C(5)$	↘	$C(\alpha)$	↗	$C(20)$

Avec $C(5) = 0{,}2\mathrm{e}^{0{,}5} + 4 \approx 4{,}32$; $C(\alpha) \approx 1{,}3$ et $C(60) = \frac{\mathrm{e}^6+20}{60} \approx 7{,}05$

4. a. L'équation $C(x) = 2$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[5\ ;\ \alpha]$ l'autre dans l'intervalle $[\alpha\ ;\ 60]$.

   b. L'équation $C(x) = 5$ admet une solutions dans l'intervalle $[\alpha\ ;\ 60]$

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5\,;\,60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

Solution:

LA fonction C admet un minimum en α, le nombre de vélo à produire sera donc soit 25 soit 26.

Comme $C(25) \approx 1{,}287\,3$ et $C(26) \approx 1{,}287\,1$, le coût moyen minimal sera atteint pour une production de 26 vélos.

Exercice 2 : (12 points)

Une agence de voyage propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris. Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 40 % des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;
- parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12 % des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'évènement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

T l'évènement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'évènement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1. (a) Quelle est la probabilité de l'évènement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?

   (b) Calculer la probabilité $P_A(V)$.

   (c) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. (a) Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.

   (b) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au millième.

3. On choisit au hasard 10 clients de l'agence. On admet que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients ayant choisi l'option « visites guidées ».

   On arrondira tous les résultats au centième

   (a) Reconnaître la loi de probabilité suivie par X et donner ses paramètres.

   (b) Donner la probabilité que 4 clients exactement aient pris l'option.

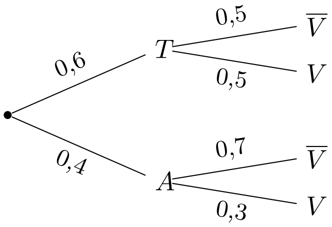
   (c) Donner la probabilité qu'au moins 2 clients aient pris l'option.

Solution:

1. (a) D'après l'énoncé, la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » est égale à 0,12.

   (b) $P_A(V) = \frac{P(A\cap V)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$.

   (c) Arbre pondéré représentant la situation :



2. (a) On utilise la formule des probabilités totales :
$P(V) = P(A \cap V) + P(T \cap V) = 0{,}12 + 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}42$.

   (b) $P_{\overline{V}}(A) = \frac{P(\overline{V} \cap A)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}4 \times 0{,}7}{1-0{,}42} = 0{,}483$.

3. (a) Chaque client choisit est une épreuve de Bernoulli de succès l'événement V, de probabilité $p = 0{,}42$. On observe une répétition de 10 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de clients ayant choisi l'option « visites guidées ». X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10; 0{,}42)$.

   (b) On a $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0{,}42^4 \times 0{,}58^6 \approx 0{,}25$. La probabilité que 4 clients aient pris l'option est donc 0,25 (au centième près).

   (c) On a $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0{,}96$. La probabilité qu'au moins 2 clients aient pris l'option est donc 0,96 (au centième près).