Exercice 1 : (6 points)

Pour chacune des affirmations proposées, une seule est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1,5 points une réponse fausse enlève 0,5 point et ne pas répondre à une réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

(1) Le nombre $A = \ln(\mathrm{e} + \mathrm{e}^2)$ peut aussi s'écrire :
a. $A = \ln \mathrm{e}^2 + \ln \mathrm{e}$ b. $A = 2{,}31$ c. $A = 1 + \ln(\mathrm{e} + 1)$

(2) Soit f la fonction définie pour tout x réel de l'intervalle $]-1;1[$ par $f(x) = \ln(1-x^2)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour ordonnées :
a. $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ b. $\ln 1 - \frac{1}{4}$ c. $\ln 3 - 2\ln 2$

(3) L'inéquation $\ln(3-x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solution :
a. $]0;3]$ b. $]0;2]$ c. $[2;3[$

(4) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -3x + 5 + 2\ln x$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :
a. $y = -x + 2$ b. $y = -x + 3$ c. $y = -3x + 2$

Exercice 2 : (10 points)

Partie A

Soit la fonction g définie sur $[1;10]$ par $g(x) = 2\ln x - 1$

(1) Étudier les variations de g sur $[1;10]$.
(2) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1;10]$.
(3) En déduire que $g(x) > 0$ si, et seulement si $x > \sqrt{e}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $[1;10]$ par $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$.

(1) a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;10]$:

$$f'(x) = 2xg(x).$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1;10]$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1;10]$.

(2) a. Montrer que, dans l'intervalle $]1;10]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 3 : (4 points)

On a représenté en annexe, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$. On a tracé les tangentes è la courbe $\mathscr{C}$ aux points D et E d'abscisses respectives 6 et 11.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Par lecture graphique (des justifications sont demandées) :

(1) Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
(2) Indiquer si la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
(3) a. Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x$
b. Hachurer ce domaine.
c. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de I.