TES 4 — DST 5 Correction — 29 janvier 2014

Exercice 1 : (6 points)

(1) Réponse C : $A = 1 + \ln(\mathrm{e}+1)$

(2) Réponse C : $\ln 3 - 2\ln 2$

(3) Réponse C : $[2;3[$

(4) Réponse B : $y = -x + 3$

Exercice 2 : (10 points)

Partie A

(1) g est dérivable sur $[1;10]$ car la fonction ln est dérivable sur cet intervalle. On a $g'(x) = \frac{2}{x}$, $x \geqslant 1$, donc $g'(x) > 0$. On en déduit que la fonction est croissante sur $[1;10]$.

(2)
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

(3) En utilisant les mêmes arguments, on montre que :
$$g(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Partie B

(1) a. f est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[1;10]$. On pose :
$$u(x) = 2x^2, \quad v(x) = \ln x - 1, \text{ donc } u'(x) = 4x, \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$
Donc :
$$f' = 4x(\ln x - 1) + 2x^2 \times \frac{1}{x} = 2x(2\ln x - 2 + 1) = 2xg(x).$$

b. sur $[1;10]$, $x > 1$ et $g(x) > 0$ ssi $x > \sqrt{e}$, on a donc :

x	1		$\sqrt{e}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}+2$	$\nearrow$	$200\ln(10) - 198$

(2) a. Sur $]1;\sqrt{\mathrm{e}}]$, la fonction est strictement décroissante, continue et $f(0) = 0$. Sur cet intervalle la fonction est donc strictement négative.
Sur $[\sqrt{\mathrm{e}};10]$, la fonction est continue, strictement croissante et $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = -\mathrm{e}+2 \approx -0{,}71 < 0$ et $f(10) = 200\ln(10) - 198 \approx 261{,}6 > 0$.
Selon un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $]1;10]$.

b. Avec la calculatrice, on remarque que $2{,}21 < \alpha < 2{,}22$.

Exercice 3 : (4 points)

(1) Par lecture graphique, on remarque que $f(0) = -5$ et $f(1) = 0$.
Par lecture graphique, on remarque que le coefficient directeur de la tangente en A de la courbe est 6. On a donc $f'(0) = 6$.
En D, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, on a donc $f'(6) = 0$.

(2) La courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en E. Le point E est donc un point d'inflexion.

(3) a. Le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 8$

b. Voir le cours.

c. Graphiquement, on a $28 < I < 32$.