Exercice 1 : (8 points)

(1) Une primitive de f est $x \mapsto x^2 + x$
Cette primitive vaut 6 en 2, la primitive F recherchée est :

$$F(x) = x^2 + x - 6$$

(2) La primitive G de g telle que $G(2) = 0$ est :

$$G(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}.$$

(3) La primitive H de h telle que $H(2) = 0$ est :

$$H(x) = 2\ln x + x - 2\ln 2 - 2.$$

(4) La primitive I de i telle que $I(2) = 0$ est :

$$I(x) = 2\mathrm{e}^{0{,}5x+2} - 2\mathrm{e}^3.$$

(5) La primitive J de j telle que $J(2) = 0$ est :

$$J(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}}.$$

Exercice 2 : (12 points)

Partie A

(1) On pose $u(x) = ax + b$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x) = a$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et donc :

$$f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} - (ax + b)\mathrm{e}^{-x} = (a - b - ax)\mathrm{e}^{-x}.$$

(2) On a $1 = f(0) = b \times \mathrm{e}^{-0} = b$ et $3 = f'(0) = a - b = a - 1$ et donc $a = 4$.

(3) On sait que $f'(x) = (3 - 4x)\mathrm{e}^{-x}$. $3 - 4x > 0$ si $x > \frac{3}{4}$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x. On a donc $f'(x) > 0$ si $x > \frac{3}{4}$ et $f'(x) < 0$ sinon.

x	0		$\frac{3}{4}$		5
f	1	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$	$\searrow$	$21\mathrm{e}^{-5}$

Partie B

(1) Selon le tableau de variations, le coût de production maximal hebdomadaire est atteint pour 75 objets produits et vaut donc 1889€.

(2) a. On dérive F, on a $F'(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - (-4x - 5)\mathrm{e}^{-x} = (4x + 1)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$ F est donc une primitive de f.

b. $F(5) = -25\mathrm{e}^{-5}$ donc $G(x) = F(x) + 25\mathrm{e}^{-5} =$ est la primitive recherchée.

(3) a. On a

$$\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(F(5) - F(0)\right) = \frac{1}{5}\left(-25\mathrm{e}^{-5} + 5\right) = 0{,}966.$$

b. On a calculé dans l'exemple précédent la valeur moyenne de la fonction f sur $[0; 5]$. L'entreprise dépensera en moyenne 966€ par centaine d'objets produits.