Exercice Opérations et valeur absolue

(1) Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $|x| = x$ et $|y| = y$, donc $|x \times y| = x \times y = |x| \times |y|$. Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $|x| \times |y| = -x \times -y = x \times y$, de plus $x \times y > 0$ donc $|x \times y| = x \times y$.
Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $|x| \times |y| = -x \times y$, de plus $x \times y < 0$ donc $|x \times y| = -x \times y$. Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on utilise le même argument

(2) On suppose que $x \neq 0$
$\left|\frac{1}{x}\right| \times |x| = \left|\frac{1}{x} \times x\right| = 1$, en divisant par $|x|$, on obtient la première égalité.
$\left|\frac{x}{y}\right| = |x| \times \left|\frac{1}{y}\right| = |x| \times \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$

Exercice 72 p. 60

(1) $MA = x$ et $MB = 8-x$ avec $x \in]0;8[$. Donc $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{8-x} = \dfrac{8-x+x}{x(8-x)} = \dfrac{8}{x(8-x)}$. $16-(x-4)^2 = 16-(x^2-8x+16) = x^2+8x$ donc $f(x) = \dfrac{8}{16-(x-4)^2}$.

(2) Soit u définie sur $]0;8[$ par $u(x) = 16-(x-4)^2$. $u(x) = 0$ si $x = 8$ ou $x = 0$ donc f est bien définie sur $]0;8[$.
On sait que u est croissante sur $]0;4[$ et décroissante sur $]4;8[$, donc f est décroissante sur $]0;4[$ et croissante sur $]4;8[$.

(3) $f(x)$ est donc minimal lorsque $x = AM = 4$.

Exercice 73 p. 60

(1) On conjecture que f est décroissante sur $[0;1]$.

(2) a. Les deux cercles sont tangents donc la distance qui sépare M et N et la somme des deux rayons du cercle. On a $MN = x+y$ donc $MN^2 = (x+y)^2$.
Le triangle MEN donc rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, $EM^2 + EN^2 = MN^2$.
On sait de plus que $FM = x$ donc $ME = 1-x$ et $HN = y$ donc $NE = 1-y$. Donc $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$.

b. On a donc $(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$, c'est-à-dire $1-2x+x^2+1-2y+y^2 = x^2+y^2+2xy$, ce qui équivaut à $2-2x-2y = 2xy$, où encore $1-x = y(1+x)$. D'où l'équation $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ ($x \in [0;1]$ donc $1+x \neq 0$).

(3) a. $-1 + \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{-(1+x)+2}{1+x} = \dfrac{1-x}{1+x} = y = f(x)$

b. $1+x \neq 0$ sur $[0;1]$ donc f est définie sur $[0;1]$.
$x \mapsto 1+x$ est croissante sur $[0;1]$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est décroissante sur $[0;1]$ donc f est décroissante sur $[0;1]$.

Exercice 3

(1) $(1+x)^2 \neq 0$ si $x \neq -1$ donc f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

(2) a. La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0[$ et croissante sur $]0;+\infty[$.

b. Démontrons un cas. Si $f(x) < 0$ et f est décroissante sur I alors f^2 est croissante sur I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. Donc $f(a) > f(b)$. $f(a)$ et $f(b)$ sont négatifs, donc, par décroissance de la fonction carrée, $f^2(a) > f^2(b)$.
La fonction f^2 est donc croissante sur I.

(3)

$$\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{4}{1+x}+\frac{4}{(1+x)^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{1+x}-\frac{4}{(1+x)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4(1+x)-4}{(1+x)^2}\right) = \frac{2x}{(1+x)^2}.$$

(4) $x \mapsto 1+x$ est croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$, donc $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ et $x \mapsto 1-\dfrac{2}{1+x}$ est croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

Soit u définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $u(x) = 1-\dfrac{2}{1+x}$. Étudions le signe de u sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $u(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, le tableau de signes de u est donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

u est strictement croissante et positive sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ donc u^2 est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.
$f = \frac{1}{2}\left(1-u^2\right)$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.
u est strictement croissante et négative sur $]-1;1]$. u^2 est donc strictement décroissante sur $]-1;1]$.
$f = \frac{1}{2}\left(1-u^2\right)$ est donc strictement croissante sur $]-1;1]$.