Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : .... *(4 points)*

Dans chaque cas, donner l'ensemble de définition et les variations de f

(1) $f(x) = \sqrt{x} - 5$

(2) $f(x) = -\sqrt{3} - \frac{1}{x}$

(3) $f(x) = -\dfrac{1}{1+|x|}$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

(5) $f(x) = \dfrac{2-4x}{2x+1}$

(6) $f(x) = \dfrac{-2}{1+\sqrt{-2\,x^2 - 4\,x + 70}}$

Exercice 2 : .... *(2½ points)*

Soit un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ Soient trois points $A(0;8)$, $B(8;6)$, $C(5;12)$ et $D(-1;24)$

(1) a. Donner un vecteur directeur de la droite (BC)

b. Donner une équation cartésienne de la droite parallèle à (BC) et passant par A.

(2) a. Montrer que $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère.

b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans le repère.

Exercice 3 : .... *(2½ points)*

ABC est un triangle. Le point I est le milieu du segment $[AB]$. Les points J et L sont tels que : $5\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$.

On choisit le repère $\left(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$

(1) Faire une figure

(2) a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$.

b. En déduire que les points I, J et L sont alignés.

Exercice 4 : .... *(2½ points)*

Dans un repère, on donne les points :

$$A(0;1), B(5;-2) \text{ et } C(3;4).$$

(1) La médiatrice d du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$.

a. M est un point de coordonnées $(x;y)$, calculer MA^2 et MB^2.

b. En déduire une équation de d.

De la même façon on montre qu'une équation de d', la médiatrice de $[AC]$ est : $x + y - 4 = 0$

(2) En déduire les coordonnées du centre du cercle de centre circonscrit au triangle ABC ainsi que son rayon.

Exercice 5 : .... *(2½ points)*

Soit u une fonction positive et décroissante sur un intervalle I.

(1) Donner le sens de variation de la fonction $\sqrt{u}$

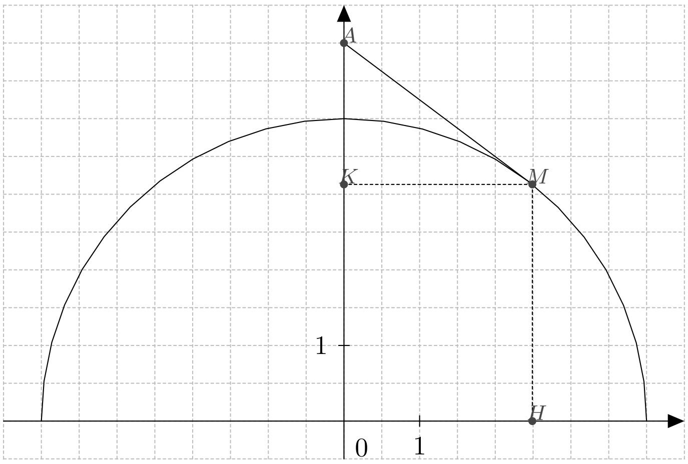
(2) Démontrer cette propriété.

Exercice 6 : .... *(4 points)*

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 4 représenté ci-dessous.

On considère le point $A(0;5)$ et le point M d'abscisse x sur le demi-cercle $\mathscr{C}$.

Les points H et K sont les projetés orthogonaux du point M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



Soit f la fonction définie par $f(x) = AM$ et u la fonction définie par $u(x) = AM^2$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et u.

(2) Conjecturer les variations de la fonction f.

(3) Exprimer OK, puis AK en fonction de x. *On se souviendra que si $N(x;y)$ appartient au cercle de centre O alors $x^2 + y^2 = rayon^2$*

(4) Montrer que $u(x) = 41 - 10\sqrt{16 - x^2}$

(5) Établir les variations de la fonction u. En déduire les variations de f.

(6) Dresser le tableau de variations de f. Déterminer le maximum et le minimum éventuels de f.

Exercice 7 : .... *(2 points)*

Dans cet exercice, toute preuve d'initiative sera récompensée

Soit A, B et C trois points non alignés, B' et C' sont définis par :

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

La droite $(B'C')$ coupe (BC) en A'.

La droite Δ_1 est parallèle à (AB) passant par A', Δ_2 est la parallèle à (AC) passant par A' et Δ_3 est la parallèle à (BC) passant par A.

Le point E est l'intersection de Δ_2 et Δ_3, F est l'intersection de Δ_1 et Δ_3.

Que peut-on dire des droites $(B'E)$ et $(C'F)$?