Exercice 1 : ....

(1) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$. Elle est strictement croissante sur le même intervalle. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(2) La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Cette fonction est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Multiplier par -1 revient à inverser les variations. Ajouter $-\sqrt{3}$ ne change rien aux variations. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

(3) La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Ajouter 1 ne change rien aux variations.

On a $|x|+1 \geqslant 1$ Donc $x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Multiplier par -1 ne change rien à l'ensemble de définition et inverse les variations.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(4) On pose $u(x) = x^2-2x+1$ On reconnaît une identité remarquable : $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, donc $u(x) \leqslant 0$ pour tout x et u est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

(5) — Soient a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$.

$a + \dfrac{b}{2x+1} = \dfrac{2ax+a+b}{2x+1}$, on a donc $a=-2$ et $b = 2+4 = 6$. Donc $f(x) = -4 + \dfrac{6}{2x+1}$

— $2x+1 = 0$ lorsque $x = -\frac{1}{2}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$. $x \mapsto 2x+1$ est strictemnt croissante sur $\mathbb{R}$. Inverser la fonction, inverse les variations, rajouter -4 ne change rien aux variations.

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ et strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

(6) — Soit $u(x) = -2x^2-4x+70$. Cherchons les racines de $u(x)$. $\Delta = 576 = 24^2$. Les racines sont donc 5 et -7 et le coefficient dominant de $u(x)$ est négatif. La fonction $\sqrt{u}$ est donc définie sur $[-7;5]$

$u(x) = -2(x+1)^2+72$, donc $\sqrt{u}$ est strictement croissante sur $[-7;1]$ et strictement décroissante sur $[1;5]$.

On a le même résultat pour $1+\sqrt{u}$

— Soit $v = 1+\sqrt{u}$. On sait que $\sqrt{u(x)} \leqslant 0$ pour tout x donc $\sqrt{u(x)}+1 \leqslant 1$ pour tout x. f est donc définie sur $[-7;5]$

On inverse la fonction v donc aussi les variations puis on multiplie par -1 on inverse donc à nouveau les variations. f est donc strictement croissante sur $[-7;1]$ et strictement décroissante sur $[1;5]$.

Exercice 2 : ....

(1) a. $\overrightarrow{BC}\binom{3}{-6}$ est un vecteur directeur de (BC).

b. Soit $M(x;y)$ un point de cette droite. $\overrightarrow{AM}\binom{x}{y-8}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc : $-6x-3(y-8) = -6x-3y+24 = 0$ est une équation de cette droite.

(2) a. Vérifions que $\overrightarrow{AB}\binom{8}{-2}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{5}{4}$ ne sont pas colinéaires. $-10+24=14\neq 0$, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc il s'agit bien d'un repère.

b. Soient a et b les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ dans ce repère. On a plus qu'à résoudre le systèmes :

$$\begin{cases} 8a+5b & =-1 \\ -2a+4b & =16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+5b & =-1 \\ a & =2b-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16b-64+5b & =-1 \\ a & =2b-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & =\dfrac{63}{21}=3 \\ a & =6-8=-2 \end{cases}.$$

On a donc $\overrightarrow{AD}\binom{-2}{3}$ dans ce repère.

Exercice 3 : ....

Voir la correction du 36 p.171.

Exercice 4 : ....

Voir la correction du DM

Exercice 5 : ....

Démonstration faite en cours.

Exercice 6 : ....

(1) M est sur le demi-cercle, x est donc compris entre -4 et 4. Les fonctions f et u sont donc définies sur $[-4;4]$

(2) Plus M se rapproche de l'axe des ordonnées, plus la distance AM est petite, on conjecture donc que f est décroissante sur $[-4;0]$ et croissante sur $[0;4]$.

(3) Soit y L'ordonnée de M (donc $OK=y$). On a $x^2+y^2=4^2=16$, donc $y=OK=\sqrt{16-x^2}$ et $AK=5-\sqrt{16-x^2}$

(4) $u(x)=AM^2=AK^2+KM^2=(5-\sqrt{16-x^2})^2+x^2=25-10\sqrt{16-x^2}+16-x^2+x^2=41-10\sqrt{16-x^2}$

(5) $x\mapsto 16-x^2$ est une fonction positive sur $[-4;4]$, strictement croissante sur $[-4;0]$ et strictement décroissante sur $[0;4]$. Passer à la racine carrée en change pas les variations, multiplier par -10 les inverse, donc u est strictement décroissante sur $[-4;0]$ et strictement croissante sur $[0;4]$.

$u(x)$ étant une distance au carrée sur $[-4;4]$ est toujours positif. Passer à la racine carrée ne modifie pas les variations donc f a les mêmes variations que u.

(6)

x	-4		0		4
f	$\sqrt{39}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{39}$

Le minimum de la fonction est donc 1 atteint en 0.

Exercice 7 : ....

À faire soi même, *On peut penser à se placer dans un repère* $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ *et calculer (avec des résolutions de système d'équations) les coordonnées de chaque nouveaux points* (A', B', C', E *et* F)*.*