NOM : , Prénom :

Exercice 1 ; (10 minutes, 4,5 points)

1) Le tableau suivant donne la répartition des notes d'une classe au baccalauréat à l'exercice de spécialité mathématiques.

Note (x_i)	1	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Effectif (n_i)	1	1	1	2	5	5	8	7
$(x_i - \overline{x})^2$								

a) Donner la formule permettant de calculer la moyenne $\overline{x}$ de la série précédente. Vérifier que $\overline{x} = 4$.

b) Compléter le tableau précédent.

c) Donner la formule permettant de calculer la variance, puis la calculer. En déduire l'écart-type.

d) Donner la médiane M_e, le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série statistique.

2) Dans une autre classe du lycée, la moyenne de l'exercice non spécialité était $\overline{x}' = 3,2$, l'écart-type $\sigma' = 1,4$, le premier quartile $Q'_1 = 2$, le troisième quartile $Q'_3 = 4,25$, le minimum 0 et le maximum 5.

a) Tracer les diagrammes en boite des deux séries statistiques en choisissant une échelle adaptée.

b) Comparer l'homogénéité des deux classes.

Exercice 2 : (15 minutes, 5 points)

1) Résoudre les équations suivantes.
(E1) : $x^2 + x = 0$ (E2) : $-3x^2 + 5x + 1 = 0$ (E3) : $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

2) Résoudre les inéquations suivantes.
(I1) : $-2x^2 + 3x - 2 < 0$ (I2) : $\dfrac{-2x+1}{x^2 - 4x - 5} \leqslant 0$

Exercice 3 : (20 minutes, 7 points)

1) On souhaite étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{-x^2+1}+2}$.

a) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{-x^2+1}$.
Étudier l'ensemble de définition de la fonction g.

b) Étudier l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

c) Étudier les variations de f sur $[-1 ; 0]$.

2) On souhaite étudier la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 4x + 6}$.

a) Déterminer la forme canonique de $3x^2 - 4x + 6$.

b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

c) Étudier les variations de h sur $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right]$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x+2| = 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|1-3x| = 5$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|2x-5| \geqslant 2$.

Problème 1 : (25 minutes, 8 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

Partie A : Restitution de connaissance

1) Donner son ensemble de définition.

2) Représenter une allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Tracer sur le schéma précédent la courbe $\mathscr{C}_{g_1}$ de la fonction g_1 définie par $g_1(x) = x$.

4) Étudier le signe de $f(x) - g_1(x)$ en fonction de x sur $[0 ; +\infty[$.
(*Indication : On pourra factoriser par* $\sqrt{x}$.)

5) En déduire les positions de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_{g_1}$.

Partie B : Cas des fonctions de type linéaire :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit la fonction g_a sur $[0 ; +\infty[$ par $g_a(x) = ax$.

1) Donner les variations de g_a sur $[0 ; +\infty[$ en fonction de a.

2) Sur un nouveau schéma, tracer une allure de la courbe de f et plusieurs courbes possibles de g_a en fonction de a.
Conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g_a}$ (la courbe représentant la fonction) en fonction de a.

3) Résoudre $f(x) = g_a(x)$.

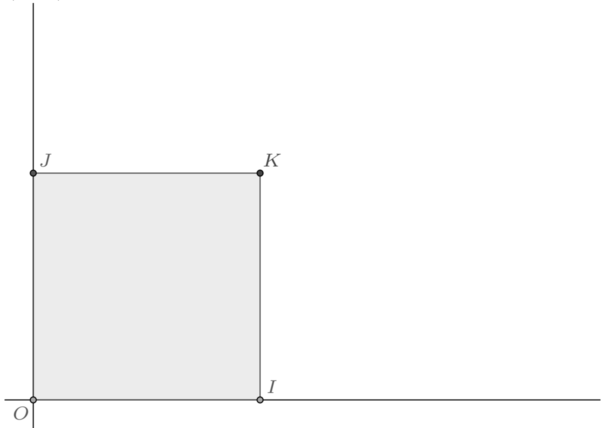
4) En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g_a}$.

Partie C : Cas général : Question ouverte

Pour rappel : Dans une question ouverte, il faut prendre des initiatives, chercher des exemples ou des contre-exemples, émettre des hypothèses et écrire tout cela sur la copie, en un mot écrire le cheminement de son raisonnement... Un résultat exact sans démarche ne rapportera aucun point.
On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = ax + b$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.
Question : Combien de points d'intersection peut-il y avoir entre la courbe de représentant la fonction racine carrée et la courbe de h ?
On donnera une réponse en s'appuyant sur des exemples graphiques ou algébriques.

Problème 2 : (40 minutes, 14 points)

Soit OIKJ un carré, A un point de la droite (OI) et B un point de la droite (OJ).
A′ est l'intersection de (JK) et de la droite parallèle à (OJ) passant par A.
B′ est l'intersection de (IK) et de la droite parallèle à (OI) passant par B.
Problème : Quelles sont les positions relatives des droites (AB′), (A′B) et (OK) ?



On choisit le repère $(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}})$ et dans ce repère on note $(a\,;\,0)$ les coordonnées de A et $(0\,;\,b)$ les coordonnées de B.

Partie A : Un cas particulier

On suppose que $a = 2$ et $b = 1,5$.

1) a) Placer les points A, A′, B et B′, puis tracer les droites (AB′), (A′B) et (OK).
   b) Émettre une conjecture sur la solution du problème.
2) a) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.
   b) En déduire les coordonnées de K et de A′.
   On admet que B′ $(1\ ;\ 1,5)$.
3) Donner une équation cartésienne de la droite (AB′).
4) Soit d la droite d'équation $\frac{1}{2}x + 2y - 3 = 0$.
   a) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.
   b) Vérifier que d passe par B.
   c) Comparer $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$.
   d) Que peut-on en conclure sur d ?
5) Déterminer les coordonnées du point M, intersection des droites d et (AB′).
6) Étudier l'alignement de O, K et M.
7) Conclure sur le problème posé.
8) Déterminer les coordonnées de C tel que AKB′C soit un parallélogramme.

Partie B : Le cas général

On suppose que a et b sont des réels quelconques.

1) a) Donner les coordonnées de A′ et de B′ en fonction de a et de b.
   b) En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$.
2) a) Démontrer que « (A′B) et (AB′) sont parallèles » équivaut à $a + b = 1$.
   b) En déduire que si $a + b = 1$, alors les trois droites sont parallèles.
3) Dans cette question, on suppose que $a + b \neq 1$.
   a) Démontrer que $(b - 1)x + ay - ab = 0$ est une équation cartésienne de la droite (BA′).
   b) Vérifier que le point M, intersection de (OK) et (BA′), a pour coordonnées :
   $$\left(\frac{ab}{a+b-1}\,;\,\frac{ab}{a+b-1}\right)$$
   c) Démontrer que les points A, M et B′ sont alignés.
4) Conclure.

Question ouverte : (5 minutes, 1,5 points)

Dans cette question toute trace de recherche sera valorisée. Soient a, b, c et d des réels tels que $a \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Déterminer le nombre de solutions possibles à l'équation $f(x) = 0$. On s'aidera d'exemples pour illustrer les différentes situations.