NOM : , Prénom :

Exercice 1

1) a) Sans difficulté.

b)

Note (x_i)	1	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Effectif (n_i)	1	1	1	2	5	5	8	7
$(x_i - \overline{x})^2$	9	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1

c) Après avoir donné les formules, on obtient

$V = \frac{1}{30}\left((1-4)^2 + (2-4)^2 + (2,5-4)^2 + (3-4)^2 + (3,5-4)^2 + (4-4)^2 + (4,5-4)^2 + (5-4)^2\right) = \frac{11}{12}$.

L'écart-type est donc $\sigma = \sqrt{\frac{11}{12}}$

d) Avec la calculatrice on a $Q_1 = 3,5$, $M_e = 4,25$ et $Q_3 = 4,5$

2) a) Sans difficulté.

b) On remarque que la classe 1 a un écart interquartile et un écart-type plus petits que la classe 2. La classe 1 est donc plus homogène.

Exercice 2

1) (E1) : $S = \{0; -1\}$ (E2) : $S = \left\{\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{37}}{6}; \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{37}}{6}\right\}$ (E3) : $S = \{1; -1\}$

2) (I1) : $S = \mathbb{R}$ (I2) : $S =]-1; \frac{1}{2}] \cup]-5; +\infty[$

Exercice 3

1) a) $-x^2 + 1$ a deux racines 1 et -1, en étudiant le signe de ce trinôme (le coefficient dominant est négatif), on a $-x^2 + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$.
g est donc définie sur $[-1; 1]$

b) $g(x) \leqslant 0$ lorsque $x \in [-1; 1]$. Donc $g(x) + 2 \neq 0$ sur le même intervalle.
f est donc définie sur $[-1; 1]$

c) $-x^2 + 1$ est une forme canonique et le coefficient dominant est négatif, donc $x :\mapsto -x^2 + 1$ est strictement croissante sur $[-1; 0]$.
Par la croissante de la fonction racine carrée, on en déduit que g est croissante sur $[-1; 0]$ puis que $g + 2$ est aussi croissante.
Par la décroissante de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $\frac{1}{g}$ est décroissante sur $[-1; 0]$ puis que $f = \frac{-3}{g}$ est croissante sur $[-1; 0]$.

2) a) $3x^2 - 4x + 6 = 3(x - 2/3)^2 + \frac{14}{3}$

b) $3(x - 2/3)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $3(x - 2/3)^2 + \frac{14}{3} \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. h est donc définie sur $\mathbb{R}$

c) Par la forme canonique, on sait que $x \mapsto 3x^2 - 4x + 6$ est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{2}{3}]$ donc h est strictement croissante sur cet intervalle.

3) a) $S = \{-1; 3\}$ b) $S = \left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$ c) $S = [-\infty; \frac{3}{2}] \cup [\frac{7}{2}; +\infty[$.

Problème 1

Partie A : Restitution de connaissance

Voir le cours sur la fonction racine carrée.

Partie B : Cas des fonctions de type linéaire :

1) g_a est croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et décroissante sinon.

2) Si $a > 0$, on conjecture qu'il y a deux intersections. Si $a < 0$, on conjecture qu'il y a une intersection.

3) $f(x) = g_a(x) \Leftrightarrow ax = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(a\sqrt{x} - 1) = 0$. $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $(a\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } a > 0, & x = \frac{1}{a^2} \\ \text{sinon,} & x \text{ n'est pas réel} \end{cases}$.

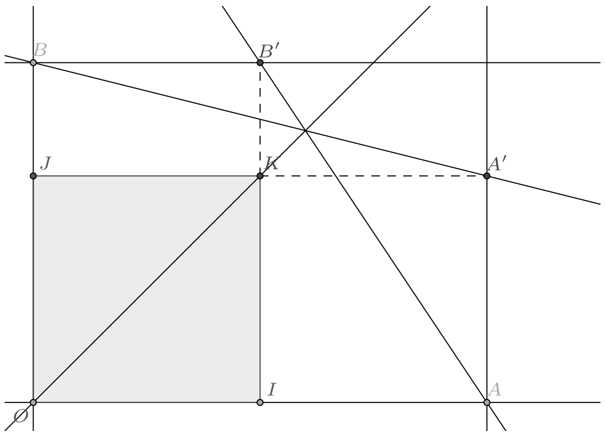
Les solutions sont donc 0 et $\frac{1}{a^2}$ si $a > 0$ et 0 sinon

4) Si $a > 0$, il y a donc 2 points d'intersection, les points de coordonnées $(0; 0)$ et $\left(\frac{1}{a^2}; \frac{1}{a}\right)$.

Partie C : Cas général : Question ouverte

Une idée de réponse algébrique. On souhaite résoudre l'équation $\sqrt{x} - ax - b = 0$. Posons $X = \sqrt{x}$.
On a donc l'équation $-aX^2 - X - b = 0$. Il y 0, 1 ou 2 solutions à cette équation. Il y aura donc au maximum 2 intersections.
$\Delta = 1 - 4ab$. On voit déjà que si $4ab > 1$, il n'y aura aucun point d'intersection. On peut donc prendre $h(x) = x + 1$ pour avoir aucune intersection
Si $h(x) = x$, on a vu qu'il y avait deux intersections.
Si $h(x) = -x$, on a vu qu'il y avait une intersection
On en déduit qu'il y a 0, une ou deux intersections.

Problème 2 : (40 minutes, 14 points)



Partie A : Un cas particulier

On suppose que $a = 2$ et $b = 1,5$.

1) a) Voir figure
   b) On conjecture que les trois droites sont concourantes.

2) a) $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IK}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$
   b) On a donc $K(1;1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ donc $A'(2;1)$.

3) $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\binom{-1}{1,5}$ est un vecteur directeur de (AB'). Soit $M(x;y)$ un point de (AB'), $AM\binom{x-2}{y}$ est un autre vecteur directeur de cette droite, par colinéarité de ces vecteurs, on a donc :
   $1,5(x-2) + y = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 3 + y = 0$ est une équation de (AB').

4) a) Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{u}\binom{-2}{\frac{1}{2}}$.
   b) $\frac{1}{2} \times 0 + 2 \times 1,5 - 3 = 3 - 3 = 0$ donc B passe par d.
   c) $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\binom{-2}{-0,5}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{A'B}} = \overrightarrow{u}$
   d) On en conclut que $y = \frac{1}{2}x + 2y - 3 = 0$ est une équation de $(A'B)$.

5) Résolvons le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + y - 3 & = 0 \\ \frac{1}{2}x + 2y - 3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x + y - 3 & = 0 \\ \frac{5}{2}x - 3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x + y - 3 & = 0 \\ x & = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{5} + y - 3 = & \\ x & = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \frac{6}{5} \\ x & = \frac{6}{5} \end{cases}$$

6) $\overrightarrow{\mathrm{OK}}\binom{1}{1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\binom{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}}$ sont colinéaires donc O, K et M sont alignés

7) Les droites (OK) , $(A'B)$ et (AB') sont concourantes.

8) Soient x et y tels que $C(x;y)$. On veut $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{CB'}}$ donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 - 2 & = 1 - x \\ 2 - 1 & = 1,5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 0,5 \end{cases}$$

   Donc $C(2;0,5)$

Partie B : Le cas général

On suppose que a et b sont des réels quelconques.

1) a) $A'(a;1)$ et $B'(1;b)$
   b) $\overrightarrow{\mathrm{OK}}\binom{1}{1}, \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\binom{1-a}{b}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\binom{-a}{b-1}$.

2) a) « (A′B) et (AB′) sont parallèles » équivaut à $(b-1) \times (1-a) + ab = 0$ donc équivaut à $b - 1 - ab + a + ab = a + b - 1 = 0$.

3) Si $a + b = 1$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\binom{1-a}{1-a}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ et les trois droites sont parallèles.

4) Dans cette question, on suppose que $a + b \neq 1$.
   a) $(b-1) \times 0 + a \times b - ab = 0$, donc les coordonnées de B vérifie cette équation.
   $(b-1) \times a + a \times 1 - ab = ab - a + a - ab = 0$, donc les coordonnées de A' vérifie cette équation.
   b) L'abscisse est égal à l'ordonnée donc $M \in (OK)$.
   $(b-1) \times \frac{(b-1)ab}{a+b-1} + a \times \frac{(a+b-1)ab}{a} - ab = \frac{ab - a + a^2b + ab^2 - ab - ab(a+b-1)}{a+b-1} = 0.$
   c) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\left(\begin{smallmatrix} \frac{ab}{a+b-1} - a \\ \frac{ab}{a+b-1} \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\binom{1-a}{b}$.
   $$\left(\frac{ab}{a+b-1} - a\right) \times b = \frac{ab^2 - a^2b - ab^2 + ab}{a+b-1} = \frac{ab - a^2b}{a+b+1}$$
   $$\left(\frac{ab}{a+b-1}\right) \times (1-a) = \frac{ab - a^2b}{a+b+1}$$
   Les Vecteurs sont colinéaires donc A, M et B' sont alignés.

5) On conclut que si $a + b \neq 1$ alors les trois droites sont concourantes.

Question ouverte : (5 minutes, 1,5 points)

En s'aidant d'exemples on remarque qu'il peut y avoir 1, 2 ou 3 solutions.