Exercice 1 : Équations et Inéquations (4 points)

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(E1) : $S = \{0; 2\}$ (E2) : $S = \{-\frac{1}{2}; 5\}$ (I1) : $S =]-\frac{1}{2}; 2[$

Exercice 2 : Questions de cours (4 points)

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$

(2) Voir le cours

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20}(2k+5) = 21\frac{5+2\times 20+5}{2} = 21\times(5+20) = 525$

Exercice 3 : Quelques exercices techniques (4 points)

(1) a. $u_n = 5 + 3(n-3)$

b. $\displaystyle\sum_{k=3}^{25} u_k = 23 \times \frac{5+71}{2} = 874$

(2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison 2 tel que $v_5 = 5$

a. $v_n = 5 \times 2^{n-5}$

b. $\displaystyle\sum_{k=5}^{15} v_k = 5\frac{2^{11}-1}{1} = 10235$

Exercice 4 : Étude d'une suite arithmético-géométrique (6 points)

Partie A : étude de la suite

(1) $u_1 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}$, $u_2 = \frac{15}{16} + 3 = \frac{63}{16}$ et $u_3 = \frac{255}{64}$.

$u_2 - u_1 = \frac{3}{16}$ et $u_1 - u_0 = \frac{3}{4}$, la progression n'est donc par linéaire, la suite n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{21}{20}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{4}$, la progression n'est pas géométrique, la suite n'est donc pas géométrique.

(2) On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{u_n}{4} + 3 - 4 = \frac{v_n+4}{4} - 1 = \frac{v_n}{4}.$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

(3) $v_0 = u_0 - 4 = 3 - 4 = -1$. $v_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$, donc $u_n = -(\frac{1}{4})^n + 4$.

Partie B : Calcul algébrique des 100 premiers termes

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} -\left(\frac{1}{4}\right)^k = -\frac{1-(\frac{1}{4})^{101}}{\frac{3}{4}} = \frac{-4+(\frac{1}{4})^{100}}{3}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} u_k = \sum_{k=0}^{100} v_k + \sum_{k=0}^{100} 400 = \frac{-4+(\frac{1}{4})^{100}}{3} + 4\times 101 = \frac{-4+(\frac{1}{4})^{100}}{3} + 404$

Partie C : Calcul de la somme par algorithme

```
U prend la valeur 3
S prend la valeur U
Pour I variant de 1 à 100
    U prend la valeur u/4 + 3
    S prend la valeur S + U
Fin Pour
Afficher le nombre S
```

Exercice 5 : Questions ouvertes (2 points)

(1) En calculant les premiers termes de v, on conjecture qu'elle est géométrique. Par calcul, on a :

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{5}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{3}{2}v_n$, (v_n) est donc une suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$

(2) On remarque que $v_0 + v_1 = u_2 - u_0$, $v_0 + v_1 + v_2 = u_3 - u_0$, etc. On a en fait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} - u_0$. Donc

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = \frac{(1-(-\frac{3}{2})^n)}{\frac{5}{2}} + 1 = \frac{7-2(-\frac{3}{2})^n}{5}.$$