Durée 1 heure. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Études de fonction (4 points)

On se donne les fonctions f définie sur un ensemble E_f de $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = -x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{3}x + 5$
2. $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{-x^2 + 2x - 6}$

Pour chaque fonction :

(1) Donner le plus grand ensemble de définition E_f, puis le plus grand ensemble de dérivation.

(2) Dresser le tableau de variations de f sur E_f.

Exercice 2 : Un petit dessin (2 points)

Dessiner une fonction f sur $[-5; 5]$ telle que sa dérivée ait le tableau de signes suivant :

x	-5		-2		1		3		$+5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 : Cosinus et sinus (3 points)

Déterminer :

(1) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

(2) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

(3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

(4) $\cos\left(\frac{2015\pi}{4}\right)$

Exercice 4 : Equations ($3\frac{1}{2}$ points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi]$ les équations :

(1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin(3x) = 1$

(3) $4\cos(2x + \pi) = 2$

(4) $2\cos^2 x - 1 = 0$

Exercice 5 : Equation particulière ($1\frac{1}{2}$ points)

(1) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique :

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right).$$

Exercice 6 : Problème (4 points)

Une entreprise souhaite fabriquer une boîte parallépipédique à base carrée de 128cm^2 de volume. Le fond et le couvercle lui reviennent à 0,04€ le cm^2, les faces latérales à 0,02€ le cm^2. En centimètres, on désigne par x le côté de la base et par h la hauteur, exprimé en centimètres.

(1) Exprimer h en fonction de x.

(2) En déduire que le prix de revient est, en centimes d'euros, $p(x) = 8x^2 + \frac{1024}{x}$.

(3) Étudier les variations de p.

(4) Pour quelles dimensions le prix de revient est-il minimal ?

Exercice 7 : Question ouverte (2 points)

Existe-t-il une fonction polynôme du troisième degré dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(1; 1)$ et admette en ces points des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?