Exercice 1 : Études de fonction

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
$f'(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	↘		$\frac{1735}{432}$	↗	$\frac{154}{27}$	↘	

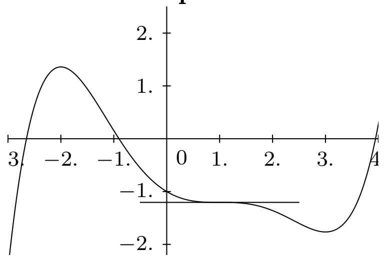
2. $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$. Par produit, on en déduit que f est aussi définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.
$f'(x) = -\dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	2	↘	

3. $-x^2 + 2x - 6 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivable avec un quotient non nul.
$f'(x) = -16\dfrac{x-1}{(-x^2+2x-6)^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$-\frac{2}{5}$	↘	

Exercice 2 : Un petit dessin



Exercice 3 : Cosinus et sinus

(1) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

(2) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

(4) $\cos\left(\frac{2015\pi}{4}\right) = \cos\left(504\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4 : Equations

(1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow S = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sur $\mathbb{R}$. $S = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$ sur $[0; 2\pi]$

(2) $\sin(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right\}$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$) dans $\mathbb{R}$. $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ sur $[0; 2\pi]$

(3) $4\cos(2x+\pi) = 2 \Leftrightarrow 2x + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Donc $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{2\pi}{3} + k\pi\right\}$ sur $\mathbb{R}$. $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$ sur $[0; 2\pi]$

(4) $2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right.$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sur $\mathbb{R}$. $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$ sur $[0; 2\pi]$

Exercice 5 : Equation particulière

(1) On remarque que $\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

(2) $\cos(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow S = \left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{5} + 2k\pi\right\}$

Exercice 6 : Problème

(1) On sait que le volume est donné par $\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h$ ou $\mathscr{B}$ est l'aire de la base. On a donc $hx = 128$ et $h = \frac{128}{x}$

(2) Le prix de revient est donc de $0{,}04 \times x^2$ euros pour une base carrée et $8x^2$ centimes d'euros pour les deux bases. Il y a 4 faces latérales, le prix de revient des faces latérales est donc $4 \times \frac{128}{x} \times 2 = \frac{1024}{x}$ centimes d'euros. Le prix de revient total est la somme des deux.

(3) $p'(x) = 16x - \frac{1024}{x^2} = 16\frac{x^3-64}{x^2}$. $x \mapsto x^3$ $x^3 - 64 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 64 \Leftrightarrow x > 4$ (La fonction cube est croissante). p est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 4[$ et p est donc strictement croissante sur $]4; +\infty[$.

(4) p atteint donc son minimum en 4 le prix de revient est donc minimal lorsque le côté du carré est de 4cm et la hauteur de $\frac{128}{4} = 32$ cm.

Exercice 7 : Question ouverte

Soit p un polynôme du 3ème degré. Il existe a, b, c et d tels que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $P(0) = d$ donc $d = 0$, $P(1) = 1$ donc $a + b + c + d = 1$.

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $P'(0) = 0$ donc $c = 0$, $P'(1) = 3a + 2b + c$ donc $3a + 2b + c = 0$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} d & = 0 \\ a+b+c+d & = 1 \\ 3a+2b+c & = 0 \\ c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d & = 0 \\ a+b & = 1 \\ a & = -\frac{2}{3}b \\ c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d & = 0 \\ b & = 3 \\ a & = -2 \\ c & = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $-2x^3 + 3x^2$ vérifie les contraintes.