

Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Dérivées de fonction (15 minutes)

(6 points)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{x} (1 + x - x^3)$

2. $h(x) = \frac{5}{x+2}$

3. $g(x) = \frac{2x+3}{2x-3}$

Exercice 2 : Étude d'une fonction (15 minutes)

(6 points)

Soit f définie sur un intervalle I par : $f(x) = -\frac{2}{15}\sqrt{x}(-10x + 9x^2) + 5$

1. Sur quel intervalle I est définie f ? Sur quel intervalle est-elle dérivable?
2. Montrer que $f'(x) = \sqrt{x}(2 - 3x)$.
3. Déterminer le tableau de variations de f sur I .
4. Quelle est l'équation réduite de la tangente de f en 1?

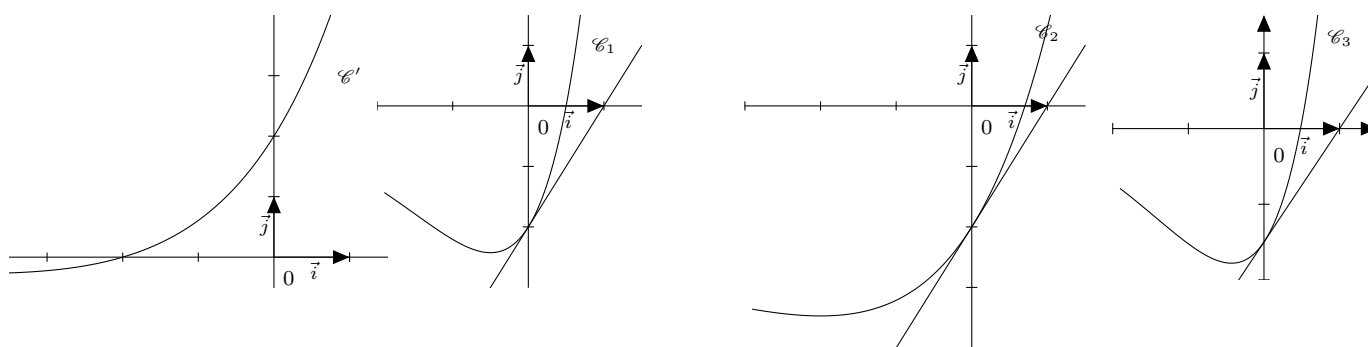
Exercice 3 : Courbe (10 minutes)

(3 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C}' représentative de la fonction dérivée de $f : f'$ et trois autres courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 avec la tangente en leur point d'abscisse 0.

L'une des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 est la courbe représentative de de la fonction f . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des autres.



Exercice 4 : Étude d'une suite (25 minutes)

(7 points)

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8% des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables : n est un nombre entier naturel
 C est un nombre réel

Traitement : Affecter à C la valeur 300
Affecter à n la valeur 0
Tant que $C < 400$ faire
 | C prend la valeur $0,92C + 50$
 | n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que

Sortie : Afficher n

- (a) Compléter le tableau ci-dessous (des colonnes peuvent rester vides).

Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		vrai				
Valeur de C	300	326				
Valeur de n	0	1				

- (b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année 2014 + n . Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

- (a) Montrer que $C_{n+1} = 0,92C_n + 50$.

- (b) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = C_n - 625$.
Montrer que pour tout nombre entier n on V_n est une suite géométriques dont on précisera son premier terme et sa raison.
- (c) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
- (d) Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?
3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.
- (a) Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?
- (b) Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

Exercice 5 : Étude d'une probabilité (25 minutes)

(9 points)

Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif est de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

partie A

On considère deux types d'appartement :

- Les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement T1 et T2 ;
- Les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur ont montré que :

- 35 % des appartements loués sont de type T1 ou T2 ;
- Parmi les appartements loués de type T1 ou T2 45% sont rentables ;
- Parmi les appartements loués, qui ne sont ni de type T1 ni de type T2, 30% sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les événements suivants :

- T : « l'appartement est de type T1 ou T2 » ;
- R : « l'appartement loué est rentable » ;
- \bar{T} est l'évènement contraire de T et \bar{R} est l'évènement contraire de R .

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à 0,3525.
3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2, sachant qu'il est rentable.

partie B

On considère X la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 20 appartements loués.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Calculer $P(X = 5)$. Donner la valeur exacte puis arrondir à 10^{-2} près
3. Calculer la probabilité qu'au plus 19 appartements parmi les 20 appartements loués soient rentables. (On se contentera de la valeur exacte).
4. Quelle est l'espérance de X ?

partie C

L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60 % des appartements sont rentables.

Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués. Parmi ceux-ci, 120 sont rentables.

Peut-on valider l'affirmation du responsable de cette agence ? Justifier cette réponse. *On utilisera un intervalle de fluctuation au seuil de 95%. Toutes les étapes de votre démarche doivent être parfaitement construites.*

Exercice 6 : Coefficients binomiaux (10 minutes)

(3 points)

1. Rappeler la règle de Pascal
2. En déduire que, pour tout $0 \leq k \leq n - 2$:

$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

3. Les coefficients binomiaux pour $n = 4$ sont 1, 4, 6, 4 et 1, en déduire (sans la calculatrice) que $\binom{6}{3} = 20$.

Exercice 7 : Question ouverte 1 (5 minutes)

(3 points)

Une variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Son espérance vaut 0,4 et son écart-type 0,6.

Déterminer n et p .

Exercice 8 : Question ouverte 2 (5 minutes)

(3 points)

On a extrait ci-contre un bloc du triangle de Pascal.

Déterminer n et k tels que $\binom{n}{k} = 171$.

171	969	3876
190	1140	4845
210	1330	5985