**Exercice 1 : Dérivées de fonction**

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2}$
2. $g'(x) = \frac{2x}{5}$
3. $h'(x) = -\frac{10x}{(x^2+4)^2}$

**Exercice 2 : Étude d'une fonction**

Soit $f$ définie sur sur un intervalle $I$ par : $f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{x+1}$

1. $f$ est définie sur $[0;+\infty[$ et est dérivable sur $]0;+\infty[$
2. La dérivée de $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ est $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

   $$f'(x) = \frac{\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) - (x-1)\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+3x-x-1-2(x-1)x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{x^2+4x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$
3. $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $(x+1)^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $x^2+4x+1$. Le discriminant de ce polynôme est 20 et les racines sont $-2-\sqrt{5}$ et $-2+\sqrt{5}$. Seule la seconde racine est positive, on a donc :

| $x$ | $0$ | | $-2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(-2+\sqrt{5})$ | $\nearrow$ | |

   Avec $f(-2+\sqrt{5}) = \dfrac{(-3+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}$
4. $f'(1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 0$ donc une équation de la tangente en 1 est $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

**Exercice 3 : Courbes**

La fonction associée à $\mathscr{C}_1$ est décroissante jusqu'à 1, elle devient croissante sur $[1;2]$ puis décroissante à nouveau à partir de 2. La fonction associée à $\Gamma_1$ est négative sauf entre 1 et 2 donc $\mathscr{C}_1$ et $\Gamma_1$ sont associée.

La fonction associée à $\mathscr{C}_2$ est décroissante entre $-1$ et 2. La seule courbe associée à une fonction négative sur cet intervalle est $\Gamma_3$, Les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\Gamma_3$ sont associée.

Par élimination, les courbes $\mathscr{C}_3$ et $\Gamma_2$ sont associée.

**Dans la suite de ce DS,** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **est un repère orthonormé du plan**.

**Exercice 4 : R.O.C**

Voir le cours

**Exercice 5 : Calcul d'un angle**

1. $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = 6 \times 4 - 2 \times 8 = 8$. $RS = \sqrt{40}$ et $RT = \sqrt{80}$.
2. On sait de plus que $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = RS \times RT \times \cos\left(\widehat{SRT}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{SRT}\right) = \dfrac{\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT}}{RS \times RT} = \dfrac{8}{\sqrt{3200}}$.

   Avec la calculatrice, on a $\widehat{SRT}$ est environ égal à 81,87 degrés à 0,01 près.

**Exercice 6 : Équations de droites remarquables d'un triangle**

Soient les points $A(2;3)$, $B(-1;4)$ et $C(4;-1)$.

Donner une équation cartésienne des droites suivantes :

1. Les coordonnées de $I$, milieu de $[AB]$ sont $(\frac{1}{2};\frac{7}{2})$. $M(x;y)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

   $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = -3(x-\frac{1}{2}) + (y-\frac{7}{2}) = -3x+y-2$.

   $-3x+y-2 = 0$ est une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.
2. $M(x;y)$ appartient à la hauteur issue de $B$ si et seulement si $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   En utilisant le même principe que précédemment, on montre que $2x - 4y + 18 = 0$ est une équation cartésienne de la hauteur issue de $B$.
3. $M(x;y)$ appartient à la tangente en $C$ au cercle de diamètre $[BC]$ si et seulement si $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

   En utilisant le même principe que précédemment, on montre que $5x - 5y - 25 = 0$ est une équation cartésienne cette tangente.

**Exercice 7 : Étude de deux cercles**

1. $x^2-8x=(x-4)^2-16$ et $y^2-4y=(y-2)^2-4$ donc
 $x^2+y^2-8x-4y+16=(x-4)^2-16+(y-2)^2-4+16=(x-4)^2+(y-2)^2-4$.
 $(x-4)^2+(y-2)^2-4=0$ est une équation du cercle de centre $A$ et de rayon 2.
2. $M(x;y)$ est un point du cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$
 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=(x-4)(x+2)+(y-2)(y-3)=x^2-4x+2x-8+y^2-2y-3y+6=x^2-2x+y^2-5y-2$.
 $x^2-2x+y^2-5y-2=0$ est une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
3. Résolvons l'équation :
 $\begin{cases}x^2-8x+y^2-4y+16=0\\x^2-2x+y^2-5y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x+y^2-4y+16=0\\6x-y-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x+y^2-4y+16=0\\y=-6x+18\end{cases}$
 $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x+(-6x+18)^2-4(-6x+18)+16=0\\y=-6x+18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}37x^2-248x+412=0\\y=-6x+18\end{cases}$
 Déterminons les racines du polynôme du second degré de la première ligne. Le discriminant est 528. Les racines sont $\dfrac{124+2\sqrt{33}}{37}$ et $\dfrac{124+2\sqrt{33}}{37}$.
 En réinjectant ces solutions dans la seconde ligne, on trouve deux solutions $\left(\dfrac{124+2\sqrt{33}}{37};\dfrac{78+12\sqrt{33}}{37}\right)$ et $\left(\dfrac{124-2\sqrt{33}}{37};\dfrac{78-12\sqrt{33}}{37}\right)$. Ce qui nous donne les deux points d'intersection.

**Exercice 8 : Problème : Déterminer un point**

**Partie A : Méthode analytique**

1. On a $A(0;0)$, $D(0;3)$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ donc $E(4;2)$.
2. $F(x;y)$ appartient à $(CD)$ si et seulement si $y=3$ (l'ordonnée de $C$ et de $D$)
3. Justifier que $(DE)\perp(AF)\Leftrightarrow\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=0\Leftrightarrow 4x-y=0$. On sait de plus que $y=3$ donc $(DE)\perp(AF)\Leftrightarrow$ $\begin{cases}y=3\\4x-3=0\end{cases}$
4. $F$ doit donc avoir les coordonnées $(\frac{3}{4};3)$ dans ce repère

**Partie B : Méthode géométrique**

1. $\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$.
 On sait de plus que $(DC)\perp(AD)$ donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ et que $(CE)\perp(DF)$ donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$.
 $D, F$ et $C$ sont alignés dans cet ordre donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DF}=DC\times DF=4DF$.
 $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires mais de sens contraire donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}=-CE\times AD=-3$
 Donc $\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=-3$
2. $(DE)$ et $(AF)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=0$.
 On a $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)$, et on a vu que si $F\in[DF]$ alors $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=4DF-3$.
 $F$ vérifie donc bien $DF=\frac{3}{4}$.

**Exercice 9 : Question ouverte**

On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.

Soit $x$ un réel tel que $M(x;0)$ (on sait que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires)

Soit $H$ la base de la hauteur du triangle $AMN$ issue de $N$. Par Phytagore, on $NH^2=NM^2-HM^2$. $AMN$ est un triangle équilatéral donc $NM=x$ et $HM=\frac{x}{2}$. On a donc $NH^2=x^2-\frac{1}{4}x^2=\frac{3}{4}x^2$ donc $NH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Les coordonnées de $N$ sont donc $(\frac{x}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

$(NC)$ et $(ND)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{DN}=0$.

$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{DN}=(\frac{x}{2}-1)\frac{x}{2}+(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1)^2=x^2-(\frac{1}{2}-\sqrt{3})x+1$.

Ce polynôme a deux racines, $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{4}$ et $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{4}$

Seule la première est comprise entre 0 et 1. on en déduit qu'il existe un seul $M$ et qu'il vérifie

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{4}\right)\overrightarrow{AB}$