Exercice 1 : Relations variations et dérivées de fonction (4 points)

Partie A : Inverse d'une fonction

Cours :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

(1) Donner le tableau de variations de f.

(2) Donner la dérivée f' de f puis le tableau de signes de f'

Application : Soit $g : x \mapsto \dfrac{10x^2 + 25x - 8}{-2x^2 - 5x + 2}$.

(1) Étudier l'ensemble de définition de la fonction g.

(2) Montrer que $g(x) = 5 - \dfrac{2}{-2x^2 - 5x + 2}$.

(3) a. Écrire le polynôme $-2x^2 - 5x + 2$ sous forme canonique.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction $x \mapsto -2x^2 - 5x + 2$.

c. Puis le tableau de variations de g

(4) Déterminer la dérivée g' de g puis le tableau de signes de g sur $[-2; 0]$.

Partie B : Racine carrée d'une fonction

Cours : Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$

(1) Sur quel intervalle est définie h ?

(2) Donner le tableau de variations de h sur cet intervalle.

(3) a. Donner le domaine de dérivation sur I de h.

b. Donner la dérivée de h sur I.

c. *À tous nombres a et h non nuls, tel que $(a + h)$ appartient à I, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est le nombre :* $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

En utilisant le taux d'accroissement, démontrer cette dérivée.

(4) Déterminer le tableau de signes de h' sur I.

Application :

Soit $i : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$

(1) Étudier l'ensemble de définition de la fonction i.

(2) Déterminer le tableau de variations de i sur $]-10; 0[$.

(3) a. Montrer que pour tout x et h dans $]-10; 0[$, on a :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{4x + 2h - 3}{\left(\sqrt{2(x + h)^2 - 3(x + h) + 2} + \sqrt{2x^2 - 3x + 2}\right)}.$$

b. En déduire $f'(x)$ pour tout $x \in]-10; 0[$.

(4) Déterminer le tableau de signes de $i'(x)$.