Exercice 1 : Suites

Partie A : Étude de (u_n) :

1. $u_1 = 20 \times 1{,}03 + 1{,}5 = 22{,}1$ $u_2 = 22{,}1 \times 1{,}03 + 1{,}5 = 24,263$
2. Les intérêts sont au taux annuel de 3%. On a donc une multiplication par 1,03. On rajoute 1500 euros chaque année ce qui explique l'ajout de 1,5.
3. $v_{n+1} = u_{n+1} + 50 = 1{,}03u_n + 1{,}5 + 50 = 1{,}03u_n + 51{,}5 = 1{,}03(v_n - 50) + 51{,}5 = 1{,}03v_n - 51{,}5 + 51{,}5 = 1{,}03v_n$.
   (v_n) est donc une suite géométrique de raison 1,03.
4. $v_0 = u_0 + 50 = 70$. Donc pour tout entier n, $v_n = 70 \times 1{,}03^n$.
   On en déduit que $u_n = 70 \times 1{,}03^n - 50$.
5. À la calculatrice, on remarque que $u_8 \approx 38{,}67$ et $u_9 \approx 41{,}33$. On devra donc attendre 2023 pour que Monsieur Dupont ait plus de 40000 €sur son compte d'épargne.

Partie B : Étude d'une nouvelle suite

1. a. Chaque année il rembourse 150 euros de moins que l'année d'avant. (w_n) est donc définie par $w_{n+1} = w_n - 150$.
   (w_n) est donc une suite arithmétique de raison -150.
   En 2014 il rembourse 1000 euros, on a donc $w_0 = 1000$ et $w_n = 1000 - 150n$.

   b. $w_n = 1000 - 150n > 0 \Leftrightarrow n < \dfrac{100}{15} \approx 6{,}7$. Au bout de 6 ans, monsieur Dupont aura donc remboursé sont prêt.

   c. Selon le cours, on a pour tout n

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = (n+1) \times \frac{w_0 + w_n}{2} = (n+1) \times \frac{1000 + 1000 - 150n}{2} = (n+1) \times \frac{2000 - 150n}{2}.$$

   On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} w_k = 7 \times \frac{2000 - 150 \times 6}{2} = 7 \times \frac{2000 - 900}{2} = 3850$. Monsieur Dupont a donc remboursé 3850€.

2. a.

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de S	0	1 000	1 850	2 550	3 100	3 500	3 750	3 850
Valeur de C	1 000	850	700	550	400	250	100	-50
Test : $C > 0$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

   b. L'algorithme affiche 3 850. Monsieur Dupont va donc rembourser 3850 euros.

Exercice 2 : Lecture graphique

Partie A :

1. $f(0) = 1$. Les solutions de $f(x) = 5$ sont approxivements $-2{,}5$ et $-1{,}2$. $f(x) < 5$ sur $[-3; -2{,}5[\cup] - 1{,}2; 4]$
2. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente en x est horizontale. On a ici 3 solutions, -2; 1 et 3.
3.

x	-3		-2		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $f'(0) = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\frac{7}{3}$ Donc $y = -\frac{7}{3}x + 1$ est une équation de la tangente en 0.

Partie B :

1. Faux, f est décroissante sur $[-2; 1]$ donc $f'(-1) < 0$.
2. Faux, voir le tableau de signes.
3. Faux, $1{,}5 \times 2 - 2 = 1$ et $f(2) \neq 1$ donc la droite d'équation $y = 1{,}5x - 2$ ne passe pas par B.

Exercice 3 : Variations et dérivées

Partie A : Inverse d'une fonction

1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_1		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$

2. a. Résolvons $-2x^2 - 5x + 2 = 0$. Le discriminant Δ est 41. Les deux solutions réels sont : $-\frac{5}{4} - \dfrac{\sqrt{41}}{4}$ et $-\frac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4}$.

   f_2 est donc définie sur $]-\infty; -\frac{5}{4} - \dfrac{\sqrt{41}}{4}[\cup] - \frac{5}{4} - \dfrac{\sqrt{41}}{4}; -\frac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4}[\cup] - \frac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4}; +\infty[$.

   b. $P(x) = -2(x^2 + \frac{5}{2}x - 1) = -2(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} - \frac{41}{16}) = -2(x + \frac{5}{4})^2 + \frac{41}{8}$
   Le coefficient dominant étant négatif, P est donc strictement croissant sur $] - \infty; -\frac{5}{4}[$ et décroissant sur $] - \frac{5}{4}; +\infty[$. De plus sur $] - \frac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4}; +\infty[$, P est strictement négatif. Comme $-\frac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4} \approx 0{,}35 < 1$, $\frac{1}{P}$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Donc $-\frac{2}{P}$ est strictement décroissante.
   f_2 est donc strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

3. f_2 est une fonction inverse. Soit $u(x) = -2x^2 - 5x_2$, $u'(x) = -4x - 5$ donc $f_2'(x) = -\dfrac{8x + 10}{(-2x^2 - 5x + 2)^2}$

Partie B : Racine carrée d'une fonction

1. a. g_1 est définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

   b. Soit h un réel tel que $a + h > 0$, le taux d'accroissement est

$$\frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{h}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{h}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{h}\right)}.$$

   Lorsque h tend vers 0, ce taux d'accroissement tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ ce qui donne la valeur de $g_1'(a)$

2. a. Étudions le signe de $2x^2 - 3x + 2$. Le discriminant est -7, il n'y a donc pas de solution réel. Le coefficient dominant est positif, donc le polynôme est toujours strictement positif. g_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$.

b. $\dfrac{g_2(x+h)-g_2(x)}{h} = \dfrac{(g_2(x+h)-g_2(x))\,(g_2(x+h)+g_2(x))}{h\,(g_2(x+h)+g_2(x))}$
$= \dfrac{\left(\sqrt{2(x+h)^2-3(x+h)+2}-\sqrt{2x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{2(x+h)^2-3(x+h)+2}+\sqrt{2x^2-3x+2}\right)}{h\,(g_2(x+h)+g_2(x))}$
$= \dfrac{2(x+h)^2-3(x+h)+2-(2x^2-3x+2)}{h\,(g_2(x+h)+g_2(x))} = \dfrac{4xh+2h^2-3h}{h\,(g_2(x+h)+g_2(x))} = \dfrac{2h+4x-3}{g_2(x+h)+g_2(x)}$

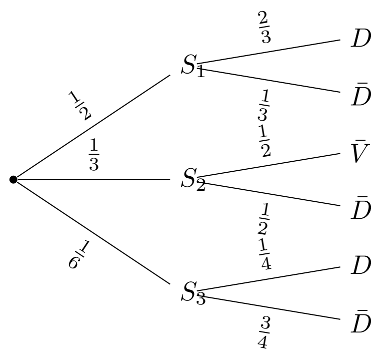
c. Lorsque h tend vers 0, ce taux d'accroissement tend vers $\dfrac{4x-3}{2g_2(x)}$, ce qui donne la valeur de $g_2'(x)$.

Exercice 4 : Probabilités

Partie A : Préliminaire

Voir le cours.

Partie B : Problème

1. 

2. Avec l'arbre, on a $P(S_1\cap D) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
$P(D) = P(S_1\cap D)+P(S_2\cap D)+P(S_3\cap D) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{13}{24}$.

3. Soit x la probabilité que la personne choisie parmi les résidents en demi-pension soit résident pour une semaine. On a $P(D)\times x = P(S_1\cap D)$ donc
$x = \dfrac{P(S_1\cap D)}{P(D)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{24}} = \frac{8}{13}$.
La probabilité est donc $\frac{8}{13}$

4. a. Les valeurs possibles de X sont 400, 600, 800, 1200, 1800.

b. $P(X=400) = P(S_1\cap\bar{D}) = \frac{1}{6}$; $P(X=1200) = P(S_2\cap D)+P(S_3\cap\bar{D}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4} = \frac{7}{24}$

x_i	400	600	800	1200	1800
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{24}$

c. $E(X) = \frac{1}{6}\times 400+\frac{1}{3}\times 600+\frac{1}{6}\times 800+\frac{7}{24}\times 1200+\frac{1}{24}\times 1800 = 825$.
$V(X) = \frac{1}{6}(400-825)^2+\frac{1}{3}(600-825)^2+\frac{1}{6}(800-825)^2+\frac{7}{24}(1200-825)^2+\frac{1}{24}(1800-825)^2 = \frac{383125}{3}$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{25\sqrt{1839}}{3}$

d. Pour un grand nombre de clients, l'hôtelier peut espérer 825 euros de dépenses par client.

5. Y vérifie la relation $Y = 0{,}9X+80$. On a donc $E(Y) = 0{,}9E(X)+80 = 822{,}5$ et $V(Y) = 0{,}9^2\times V(X) = \dfrac{413775}{4}$

Exercice 5 : Géométrie analytique

Partie A : Étude d'un cas particulier

1. En plaçant les points, on conjecture que M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

2. a. A est le milieu de $[DB]$ les coordonnées $(x_D; y_D)$ de D vérifies donc $2 = \frac{5+x_D}{2}$ et $1 = \frac{-1+y_D}{2}$ donc $x_D = -1$ et $y_D = 3$. On montre de la même façon que $(3;2)$ sont les coordonnées de E.
Soit $M(x;y)$ un point de (DE). On a $\overrightarrow{DM}\binom{x+1}{y-3}$ et $\overrightarrow{DE}\binom{4}{-1}$. $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires, ce qui est équivalent à $-(x+1)-4(y-3) = 0$ donc $-x-4y+11 = 0$ est une équation de (DE).

b. $4\times 5-1-19 = 0$ et $4\times 4+3-19 = 0$ donc la droite d'équation $4x+y-19 = 0$ passe par B et C. Ce qui prouve que c'est une équation de (BC).

c.
$$\begin{cases}-x-4y+11 &= 0\\ 4x+y-19 &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x-4y+11 &= 0\\ 16x+4y-76 &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x-4y+11 &= 0\\ 15x-65 &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{13}{3}-4y+11 &= 0\\ x &= \frac{13}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y &= \frac{5}{3}\\ x &= \frac{13}{3}\end{cases}.$$

d. $M_1\left(\dfrac{4-1}{2};\dfrac{3+3}{2}\right)$ donc $M_1\left(\frac{3}{2};3\right)$. $M_2\left(4;\frac{1}{2}\right)$.

e. $\overrightarrow{M_1M_2}\binom{\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}\binom{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{3}}$.
$-\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\times\frac{5}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont colinéaires et donc M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

Partie B : Étude du cas général

1. on remarque que les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.
2. On a $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
3. (DE) et (BC) se coupent entre elles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DE}\binom{1}{a}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{-1}{1}$ ne sont pas colinéaires.
Donc (DE) et (BC) se coupent si $1+a\neq 0$.
4. $a\times 0-a+a = 0$ et $a\times -1-0+a = 0$ donc (DE) a pour équation $ax-y+a = 0$.
$1+0-1 = 0$ et $0+1-1 = 0$ donc (BC) a pour équation $x+y-1 = 0$.
5. $a\times\dfrac{1-a}{a+1}-\dfrac{2a}{a+1}+a = \dfrac{a(1-a)-2a+a(a+1)}{a+1} = 0$ donc F appartient à (DE).
$\dfrac{1-a}{a+1}+\dfrac{2a}{a+1}-1 = \dfrac{1-a+2a-a-1}{a+1} = 0$ donc F appartient à (BC).
6. Les coordonnées de M_1 sont $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, de M_2 sont $\left(\frac{1}{2};\frac{a}{2}\right)$ et M_3 sont $\left(\dfrac{1-a}{2(a+1)};\dfrac{a}{a+1}\right)$.
$\overrightarrow{M_1M_2}\binom{1}{\frac{a-1}{2}}$, $\overrightarrow{M_1M_3}\left(\begin{array}{c}\dfrac{1}{a+1}\\ \dfrac{a-1}{2(a+1)}\end{array}\right)$.
$\dfrac{a-1}{2(a+1)}-\dfrac{a-1}{2(a+1)} = 0$ donc M_1, M_2 et M_3 sont alignés.