Exercice 1 : Cours

(1) $\overrightarrow{AB}\binom{-5}{-4}$

$I(\frac{1}{2};3)$ et $AB=\sqrt{41}$

(2)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		$\nearrow$	-5	$\searrow$	

Exercice 2 : Inéquations

(1) $S=\left\{\dfrac{-\sqrt{5}+5}{3};\dfrac{\sqrt{5}+5}{3}\right\}$

(2) $S=\{3;7\}$

(3) $S=\{0;2\}$

(4) $S=]-\frac{3}{2};\frac{1}{2}[$

(5) $S=]-\infty;-\frac{2}{3}]\cup[\frac{5}{7};+\infty[$

(6) $S=]-\infty;-\frac{9}{2}[\cup]3;+\infty[$

Exercice 3 : Une équation de droite

(1) Le coefficient directeur de (AB) est $-\frac{4}{3}$

(2) L'équation réduite est du type $y=-\frac{4}{3}x+b$ où b est l'ordonnée à l'origine. La droite passe par C donc $4=-\frac{4}{3}\times 4+b$ et $b=4+\frac{16}{3}=\frac{28}{3}$. L'équation est donc $y=-\frac{4}{3}x+\frac{28}{3}$

(3) $-\frac{4}{3}\times 7+\frac{28}{3}=0\neq 3$ donc D n'appartient pas à d.

Exercice 4 : Tracer des droites

(1) Prendre les points $A(0;-3)$ et $B(2;1)$

(2) Prendre les points $C(4;3)$ et $D(-3;-2)$

Exercice 5 : Vecteur

(1) $\overrightarrow{AB}\binom{5}{-1}$ et $\overrightarrow{DC}\binom{5}{-1}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(2) On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

(3) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\binom{5-5}{-1+1}$ les coordonnées sont donc $\binom{0}{0}$ et $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)\binom{5+5}{-1-1}$ les coordonnées sont donc $\binom{10}{-2}$.

(4) Soient $(x_E;y_E)$ les coordonnées de E. $ABDE$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$ et donc $-x_E=5$ et $5-y_E=-1$. Ainsi $x_E=-5$ et $y_E=6$ donc $E(-5;6)$.

Exercice 6 : Calculs sur les fonctions polynômes du second degré

(1) Représenter schématiquement les fonctions polynômes suivantes :

a. Coordonnées du sommet $(3;5)$, coefficient dominant 1 (1 carreau vers la droite et un vers le haut).

b. Coordonnées du sommet $(-2;-5)$, coefficient dominant -2 (1 carreau vers la droite et 2 vers le bas).

c. Coordonnées du sommet $(3;1)$, coefficient dominant $\frac{2}{3}$ (3 carreaux vers la droite et 6 vers le haut).

(2) a. $f(x)=5(x+2)^2+3=5(x^2+4x+4)+3=5x^2+20x+23$, donc $a=5$, $b=20$ et $c=23$

b. $f(x)=2(x-2)(x+5)=2(x^2-2x+5x-10)=2x^2+6x-20$, donc $a=2$, $b=6$ et $c=-20$.

c. Par symétrie de la parabole, on sait que le sommet est d'abscisse -2, donc $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2+y_0$ où y_0 est l'ordonnée du sommet.

$f(0)=2+y_0=2$ donc $y_0=0$.

Ainsi $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2=\frac{1}{2}x^2+2x+2$ donc $a=\frac{1}{2}$, $b=2$ et $c=2$.

Exercice 7 : Problème de synthèse

(1) a. APM est isocèle et rectangle donc $\widehat{PMA} = 45^\circ$. De la même façon, l'angle $\widehat{QMB} = 45^\circ$. On a donc $\widehat{PMQ} = 180 - 45 - 45 = 90^\circ$ donc PMQ est rectangle en M.

b. APM est isocèle et rectangle donc $PA = PM$ et $PA^2+PM^2 = AM^2$, ainsi $PM^2 = \frac{AM^2}{2} = \frac{x^2}{2}$. Donc $PM = \frac{x}{\sqrt{2}}$. De même $QM = \frac{10-x}{\sqrt{2}}$.

c. Comme PMQ est rectangle, on a $PQ^2 = PM^2 + QM^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{(10-x)^2}{2} = x^2 - 10x + 50$

(2) a.

x	0	5	10
f	50 ↘	25	↗ 50

b. $f(x) = (x-5)^2 + 25 = x^2 - 10x + 50 = PQ^2$.

c. PQ^2 est donc compris entre 25 et 50 et PQ est compris entre 5 et $5\sqrt{2}$.

(3) $PQ = 3$ revient à $PQ^2 = 9$ donc $(x-5)^2 + 25 = 9$, c'est-à-dire $(x-5)^2 = -16$. C'est impossible, on ne peut donc pas placer M tel que $PQ = 9$

Exercice 8 : Problème ouvert

Avec la figure, on conjecture que les 3 droites sont concourantes.

Dans le repère $(A; B; D)$, on a $A(0;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $G(1;\frac{1}{2})$, $B(1;0)$ et $E(0;2)$.

Donc, l'équation de (AC) est $y = x$, l'équation de (DG) est $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et l'équation de (EB) est $y = -2x + 2$.

Les coordonnées du point d'intersection O de (AC) et (DG) sont les solutions de :

$$\begin{cases} y &= x \\ y &= -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ y &= -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{2}{3} \\ y &= \frac{2}{3} \end{cases}.$$

De plus $-2 \times \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3}$ donc O appartient à (EB).

Les trois droites sont donc bien concourantes en O.